DOCUMENTATION

OFFICE de la RECHERCHE SCIENTIFIQUE
et TECHNIQUE OUTRE-MER

ELECTRICITE de FRANCE

CONTRIBUTION au PROBLEME de l'ABATTEMENT des PLUIES JOURNALIERES

par

Marcel ROCHE

12 OCT. 1983
O.R.S.T.O.M. Fonds Documentaire
N° : 3318
Cote : B ex 1

ORSTOM
HYDROLOGIE
DOCUMENTATION
70950

Février 1961

CONTRIBUTION au PROBLEME de l'ABATTEMENT des PLUIES JOURNALIERES

I - Exposé général

I - Position théorique du problème

On définit généralement le coefficient d'abattement, ou de réduction, d'une averse comme le rapport de la hauteur moyenne de précipitation provoquée par cette averse au maximum ponctuel observé.

Cette définition, simple et d'apparence saine, donne lieu à des controverses sans fin lorsqu'il s'agit de passer aux applications. On s'est beaucoup préoccupé, en particulier, de la position de l'épicentre des averses par rapport au bassin, et on se heurte à d'insurmontables difficultés pour introduire de telles données dans des études statistiques.

Or, quel but se propose-t-on lorsqu'on se livre à de telles recherches ? On suppose que la répartition statistique des averses ponctuelles, en un lieu donné, est à peu près bien connue et que l'on est capable de définir une averse de probabilité donnée; mais on a besoin de connaître, par exemple pour un calcul de crue exceptionnelle, la hauteur moyenne sur un bassin défini ayant même probabilité. Le problème est résolu si l'on peut répondre à la question suivante :

> Etant donné que la pluie ponctuelle en un point arbitraire de la surface S a une probabilité donnée, quelle est la pluie moyenne de même probabilité sur cette surface ?

Nous proposons de présenter sous cette forme la définition même de l'abattement. Elle implique que la pluie en chaque point suit la même loi de probabilité, autrement il faudrait définir le point de référence : cette condition sera désignée sous le nom d'isotropisme.

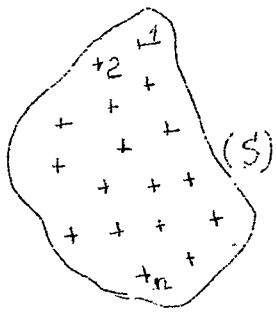


Fig 1

Supposons donc une surface S avec une répartition homogène de points 1, 2 ...., n auxquels sont attachées les pluies h_1, h_2 .... h_n. Si les points sont assez nombreux, on peut estimer la pluie moyenne h_m par :

$$h_m = \frac{h_1 + h_2 + \dots\dots\dots\dots + h_n}{n}$$

Les h_1, h_2 .... h_n sont des variables aléatoires obéissant, indépendamment l'une de l'autre, à la même loi de probabilité et liées entre elles. Appelons $\rho\ (h_1, \dots, h_n)$ la densité de probabilité de l'ensemble $(h_1, \dots, h_n)$; la probabilité élémentaire est définie par $\rho\ (h_1 \dots h_n)\ dh_1\ dh_2 \dots dh_n$. La probabilité de dépassement d'une pluie journalière h moyenne sur la surface est définie par la somme des masses des points de l'ensemble probabilisé

$$\int_1 \int_2 \dots \int_n \rho(h_1, h_2 \dots h_n)\ dh_1\ dh_2 \dots dh_n = 1 \quad (1)$$

qui répondent à la condition

$$\frac{h_1 + h_2 + \dots\dots h_n}{n} \geqslant h \quad (2)$$

L'expression exacte de la probabilité est fournie par le passage à la limite des expressions précédentes pour $n \longrightarrow \infty$.

Le problème étant ainsi posé en termes précis, il est bien évident qu'on ne pourra pas se servir des relations (1) et (2) pour le résoudre. Même en conservant la forme discrète, il serait pratiquement impossible d'expliciter les liaisons multiples entre les variables h de façon à les introduire dans le calcul.

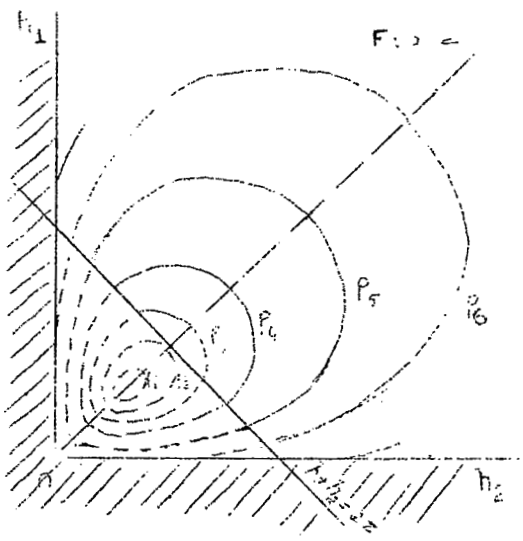
La suite de cet exposé a pour but de rechercher un mode de calcul possible moyennant certaines hypothèses qui relèvent plus souvent d'un point de vue intuitif que d'une rigoureuse analyse.

2 - Etude d'un couple de points

Considérons deux points 1 et 2 distants de d_{12} pour lesquels les fonctions de répartition de la pluie sont respectivement F_{h1} et F_{h2}. Soit $\rho(h_1, h_2)$ la densité de probabilité du couple (h_1, h_2).

Désignons par $z = \frac{h_1 + h_2}{2}$ la pluie moyenne sur le couple.

La probabilité de dépassement de z est définie par les points de l'ensemble probabilisé $\iint \rho(h_1, h_2)\, dh_1\, dh_2$ (étendu au domaine de variation de h_1 et de h_2), vérifiant l'inégalité $h_1 + h_2 \geqslant 2z$.



Traçons dans un plan (h_1, h_2) les courbes d'égale densité $\rho_1, \rho_2 \ldots$ Notons que, par suite de l'isotropisme, ces courbes sont symétriques par rapport à la bissectrice du quadrant h_1 o h_2. Les axes oh_1 et oh_2 correspondent à des densités de probabilité non nulles : ils contiennent les points d'aboutissement des courbes d'égale densité pour lesquelles un des éléments du couple peut être nul. Toutes les courbes sont évidemment contenues dans le premier quadrant, une pluie ne pouvant être négative.

Dans l'ensemble des points du plan ainsi probabilisé, la condition $h_1 + h_2 \geqslant 2z$ se traduit par le fait que les couples pris en compte pour le calcul de la probabilité de dépassement doivent se trouver dans la partie du plan délimitée par les axes, la droite $h_1 + h_2 = 2z$, et ne contenant pas l'origine : ceci correspond aux courbes en traits pleins de la figure 2.

La détermination de la probabilité se fait par double intégration graphique en évaluant le volume du relief défini par les courbes d'égale densité.

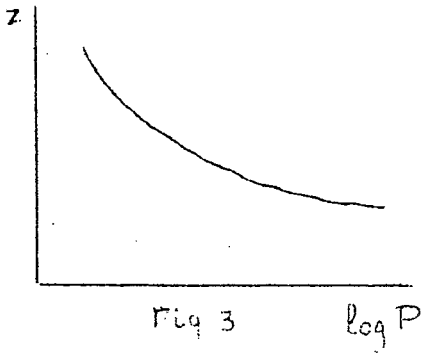


Fig 3

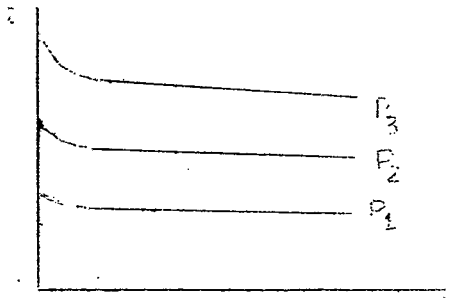


Fig. 4

En procèdant ainsi pour plusieurss valeurs de z, on peut tracer la courbe z (P) donnant la variation de z en fonction de la probabilité P. On a intérêt à porter en abscisse le logarithme de la probabilité pour avoir des échelles convenables (fig.3)

On recommence les opérations précédentes pour un certain nombre de couples en faisant varier la distance d et on trace en définitive un réseau de courbes z (d) graduées en probabilités (fig. 4).

Pour un échantillon de couples donné, on pourrait envisager de calculer la fréquence de dépassement par simple décompte des couples répondant à la condition $h_1 + h_2 \geqslant 2z$ et en divisant le chiffre trouvé par le nombre total de jours de la période d'observation. Mais, en général, le nombre d'observations portant sur des couples est faible et la fréquence trouvée constituerait une très mauvaise estimation de la probabilité. Il vaut mieux n'utiliser les observations sur couples que pour l'estimation des paramètres de liaison et, en particulier, des coefficients de corrélation. Les autres paramètres de la densité de probabilité à deux variables peuvent être estimés avec une bien meilleure précision par la prise en compte de longues séries d'observations effectuées à un seul poste. Si l'on ajoute que l'influence de ces derniers paramètres est, en général prépondérante, on voit tout l'intérêt de la méthode proposée.

3 - Passage à la surface

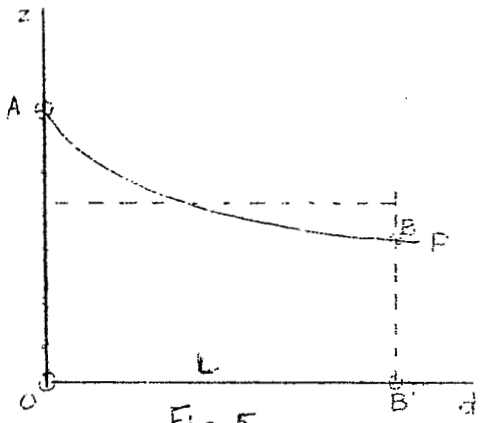


Fig. 5

Jusque là, nous n'avons rien avancé qui ne soit parfaitement rigoureux. Le passage du couple à la surface va nous obliger à mettre en avant des hypothèses qui nous semblent logiques mais dont nous n'avons pas entrepris la démonstration.

Considérons, figure 5, une des courbes z (d) pour P donnée. Les couples de points du terrain se trouvant sur une bande étroite de longueur L telle que la répartition de la pluie y réponde à une probabilité de dépassement P ont tous de très fortes chances d'être représentés sur le graphique par des points situés au-dessus de la courbe P dans la zone limitée par $o \leq d \leq L$. Notons que le point de plus forte pluie peut se trouver n'importe où sur la bande avec la même probabilité (condition d'isotropisme).

On peut donc dire que la pluie moyenne sur la bande de probabilité de dépassement P est comprise entre OA et OB. On admettra comme moyenne la plus probable l'ordonnée moyenne de la courbe AB.

Pour aller plus loin, il faut se donner la forme de la surface. On admettra, si cette forme n'est pas trop irrégulière, qu'on peut assimiler la surface à ce que nous avons appelé son rectangle équivalent, c'est-à-dire au rectangle ayant même superficie et même coefficient de compacité (1).

Soit donc un tel rectangle de longueur L est de largeur l. A chaque point de la bande sans largeur considérée plus haut, on peut associer une série de variables aléatoires distribuées suivant la largeur l avec la même loi que suivant la longueur (isotropisme), mais à partir d'une valeur caractérisée sur la courbe z (d) par une distance x que nous voudrons bien attribuer au point considéré. D'après l'hypothèse admise pour la moyenne sur une bande étroite, la moyenne sur une bande disposée cette fois suivant la largeur pourra s'écrire :

(1) M. ROCHE : Etude hydrologique de l'IKOPA et de la BETSIBOKA - Office de la Recherche Scientifique et Technique Outre-Mer - Paris - Avril 1958.

$$\frac{1}{l}\int_{x}^{x+l} z\,(y)\,dy \qquad (3)$$

Cette valeur est également une variable aléatoire considérée par rapport à x et la moyenne sur l'ensemble de la surface sera :

$$\frac{1}{l\,L}\int_{0}^{L} dx \int_{x}^{x+l} z\,(y)\,dy \qquad (4)$$

La variable x est identique à d ; cette nouvelle notation a été adoptée pour éviter la confusion avec la notation différentielle. La condition d'isotropisme permet d'écrire en définitive :

$$h_{\text{moyen}} = \frac{1}{l\,L}\int_{0}^{L}\left[\int_{x}^{x+l} z\,(x)\,dx\right] dx \qquad (5)$$

ou :

$$\frac{1}{l\,L}\int_{0}^{L}\left[\int_{0}^{x+l} z\,(x)\,dx - \int_{0}^{x} z\,(x)\,dx\right] x \qquad (6)$$

Le calcul se fait à partir de la courbe z (x) par double intégration graphique.

II - Cas particulier des averses tropicales non cycloniques

Les études que nous avons effectuées sur les pluies journalières tropicales d'Afrique, en dehors des zones soumises à l'influence des cyclones tropicaux, nous ont montré que leur loi de répartition statistique peut se mettre sous la forme

$$F(h) = F_o + (1 - F_o) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y - \bar{y}}{\sigma_y}\right)^2} dy \quad (7)$$

avec $y = \text{Log } h$

autrement dit, le logarithme naturel de la pluie journalière suit une loi normale tronquée, la fréquence tronquée étant $\varphi(h) = \frac{F_h - F_o}{1 - F_o}$

Si h_1 et h_2 représentent les pluies ponctuelles en deux points, la loi tronquée du couple peut s'écrire :

$$\psi(h_1, h_2) = \int_0^{h_1} \int_0^{h_2} \rho(h_1, h_2)\, dh_1\, dh_2 \quad (8)$$

Si les deux points ne sont pas trop éloignés, on peut admettre que l'occurence d'une pluie nulle avec une pluie non nulle est très rare, tout au moins pour des averses de quelque importance. La fréquence réelle du couple est alors :

$$F(h_1, h_2) = (1 - F_o)\, \psi(h_1, h_2) + F_o \quad (9)$$

Il suffit donc d'étudier ψ et la probabilité cherchée est définie par les points de l'ensemble probabilisé :

$$\frac{1}{2\pi\sigma_y^2\sqrt{1-r^2}}\iint e^{-\frac{2}{2(1-r^2)}\left[\left(\frac{y_1-\bar{y}}{\sigma_y}\right)^2-2r\frac{(y_1-\bar{y})(y_2-\bar{y})}{\sigma_y^2}+\left(\frac{y_2-\bar{y}}{\sigma_y}\right)^2\right]}\,dy_1\,dy_2 \qquad (10)$$

$\bar{y}$: moyenne commune de Log h_1 et Log h_2

σ_y : écart-type commun de Log h_1 et Log h_2

r : coefficient de corrélation entre y_1 et y_2

répondant à la condition $h_1 + h_2 \geqslant 2\,z$ ou $y_2 \geqslant \text{Log}\,(2\,z - e^{y_1})$

Dans ce cas particulier, il est plus simple de tracer les courbes d'égale densité de probabilité dans le plan des y_1, y_2 plutôt que dans le plan des h_1, h_2. Mais alors l'intégrale s'étend à la totalité du plan et non plus au premier quadrant, y pouvant varier de $-\infty$ à $+\infty$. La limite correspondant au domaine d'intégration relatif à une valeur donnée de z sera défini par une courbe $y_2 = \text{Log}\,(2\,z - e^{y_1})$ et non plus par une droite.

Une courbe d'égale densité de probabilité D est une ellipse qui a pour équation :

$$(y_1-\bar{y})^2 - 2r(y_1-\bar{y})(y_2-\bar{y}) + (y_2-\bar{y})^2 = -2(1-r^2)\sigma_y^2\,\text{Log}(2\pi\sigma_y^2\sqrt{1-r^2}D) \qquad (11)$$

Il est donc relativement simple de tracer la famille de courbes d'égale densité et de poursuivre les calculs, comme il a été indiqué précédemment. Ces calculs sont toutefois assez longs et si l'on veut atteindre une précision acceptable pour l'évaluation de la probabilité de dépassement, il faut un réseau d'éllipses assez serré.

III - Pratique des calculs et exemple d'application

L'exemple que nous proposons en application de cette méthode est tiré des études d'hydrologie analytique faites en COTE d'IVOIRE sur le bassin du FLAKOHO, près de FERKESSEDOUGOU, de 1957 à 1959.

La station de base utilisée pour l'estimation des paramètres relatifs à la distribution de la pluie journalière ponctuelle est celle de FERKESSEDOUGOU. On a, avec les notations adoptées ci-dessus :

$$\bar{y} = 2,86$$

$$\sigma_y = 0,704$$

$$1 - F(o) = F_1(o) = 0,15$$

Le paramètre de liaison choisi est le coefficient de corrélation entre les valeurs y d'un couple de pluviomètres (logarithmes naturels des pluies journalières). On a pu disposer ainsi de 32 couples d'appareils pour des distances comprises entre 1,6 et 9,9 km, ce qui a permis de tracer une courbe moyenne de r en fonction de la distance :

1 km	0,90	4 km	0,68	10 km	0,52
2 km	0,80	6 km	0,61	14 km	0,50
3 km	0,73	8 km	0,57		

Le bassin du FLAKOHO a une superficie de 50 km. La longueur et la largeur de son rectangle équivalent sont respectivement : L = 9,1 km et l = 5,5 km.

1 - Tracer des ellipses

Posons $(y_1 - \bar{y}) = Y_1$

$(y_2 - \bar{y}) = Y_2$

$$- 2 (1-r^2) \sigma_y^2 \text{ Log } (2\pi \sigma_y^2 \sqrt{1 - r^2} D) = k$$

L'équation (11) devient :

$$Y_1 = r Y_2 \pm \sqrt{k - (1 - r^2) Y_2^2} \qquad (12)$$

qui permet de tracer l'ellipse assez facilement point par point. Il suffit en effet de se donner quelques points remarquables.:

Coordonnées des points de contact des deux tangentes horizontales:

$$Y_2 = \pm \sqrt{\frac{k}{1 - r^2}} \qquad Y_1 = r Y_2$$

(Les tangentes verticales s'en déduisent par symétrie)

Coordonnées des extrêmités du grand axe et du petit axe :

$$Y_1 = Y_2 = \pm \sqrt{\frac{k}{2(1-r)}} \quad \text{et } Y_1 = - Y_2 = \pm \sqrt{\frac{k}{2(1+r)}}$$

Intersections avec les axes de coordonnées

$$Y_2 = o \ , \ Y_1 = \pm \sqrt{k} \quad \text{et} \quad Y_1 = o \ , \ Y_2 = \pm \sqrt{k}$$

Si l'ellipse est grande, on peut parfaire le tracé en calculant 1 ou 2 points supplémentaires (1 point calculé en donne 3 autres par symétrie par rapport aux axes).

En fait, on calcule par ce procédé quelques ellipses formant le canevas du réseau. Les autres ellipses sont tracées beaucoup plus rapidement en utilisant une formule d'interpolation basée sur l'équation de l'ellipse en coordonnées polaires. Le rayon vecteur a pour module :

$|\rho| = \sqrt{\dfrac{k}{1-r \sin 2\vartheta}}$. Considérons deux ellipses et des rayons vecteurs colinéaires : ρ_1 et ρ_2

On a : $$\frac{|\rho_1|}{|\rho_2|} = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} = \sqrt{\frac{\mu + \log D_1}{\mu + \log D_2}} \qquad (13)$$

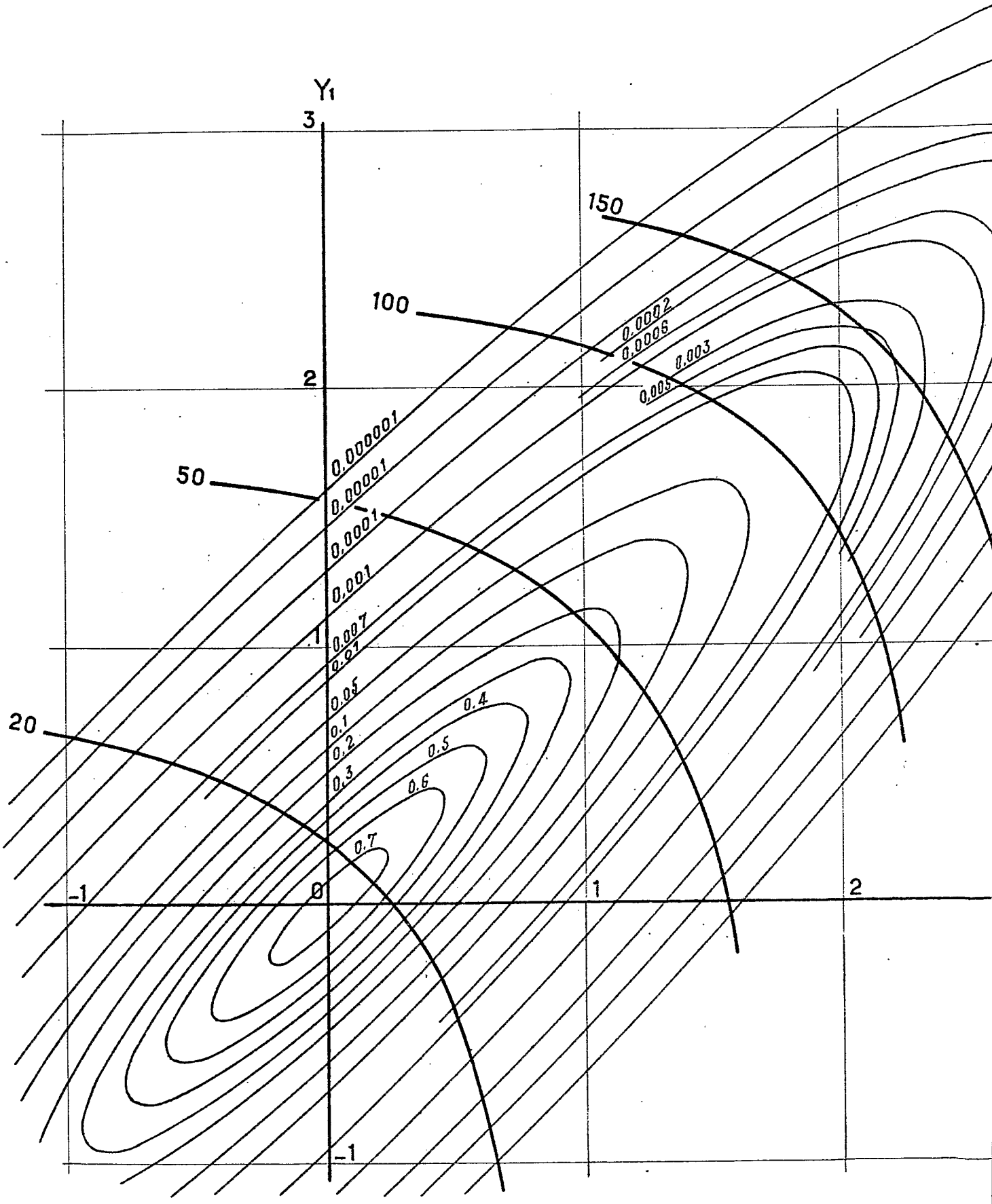
avec $\mu = \log (2\pi \sigma_y^2 \sqrt{1-r^2})$

Le calcul du rapport des modules est donc très rapide et la construction d'une ellipse à partir de l'autre se fait assez vite au moyen de la règle à calcul fixée toujours dans la même position et d'une règle pivotant autour du centre qui n'est autre que l'origine des axes Y_1 et Y_2.

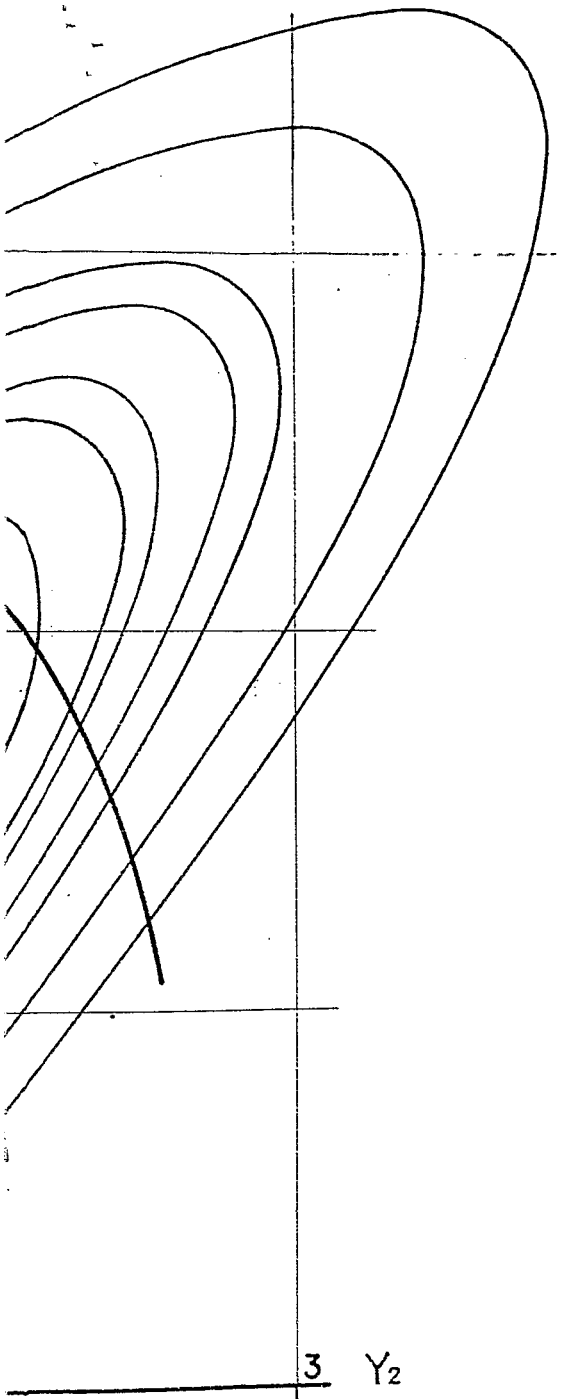
Dans la présente application, les réseaux d'ellipses ont été tracés pour r = 0,90, 0,70, 0,60, 0,50 sur les figures 6 à 9.

2 - Calcul des probabilités de dépassement

On a porté également sur les graphiques précédents les courbes $e^{(Y_1 + \bar{y})} + e^{(Y_2 + \bar{y})} = 2z$ pour z = 20, 50, 100 et 150. Prenons l'exemple de la courbe z = 50 pour le réseau r = 0,60 (fig. 8). La courbe z = 50 est sensiblement tangente à l'ellipse D = 0,1. On planimètre successivement les surfaces comprises entre l'ellipse D = 0,07 et la courbe z = 50, D = 0,05 et la même courbe etc... Les points correspondants sont portés sur un graphique : en abscisses les surfaces trouvées, en ordonnées les densités de probabilités. La surface donnée par la courbe ainsi définie est égale, compte tenu des échelles utilisées pour les différents graphiques, à la probabilité de dépassement d'une hauteur de précipitation moyenne de 50 mm, suivant la loi tronquée. Pour avoir la véritable probabilité, il suffit de multiplier le chiffre trouvé par 0,15.

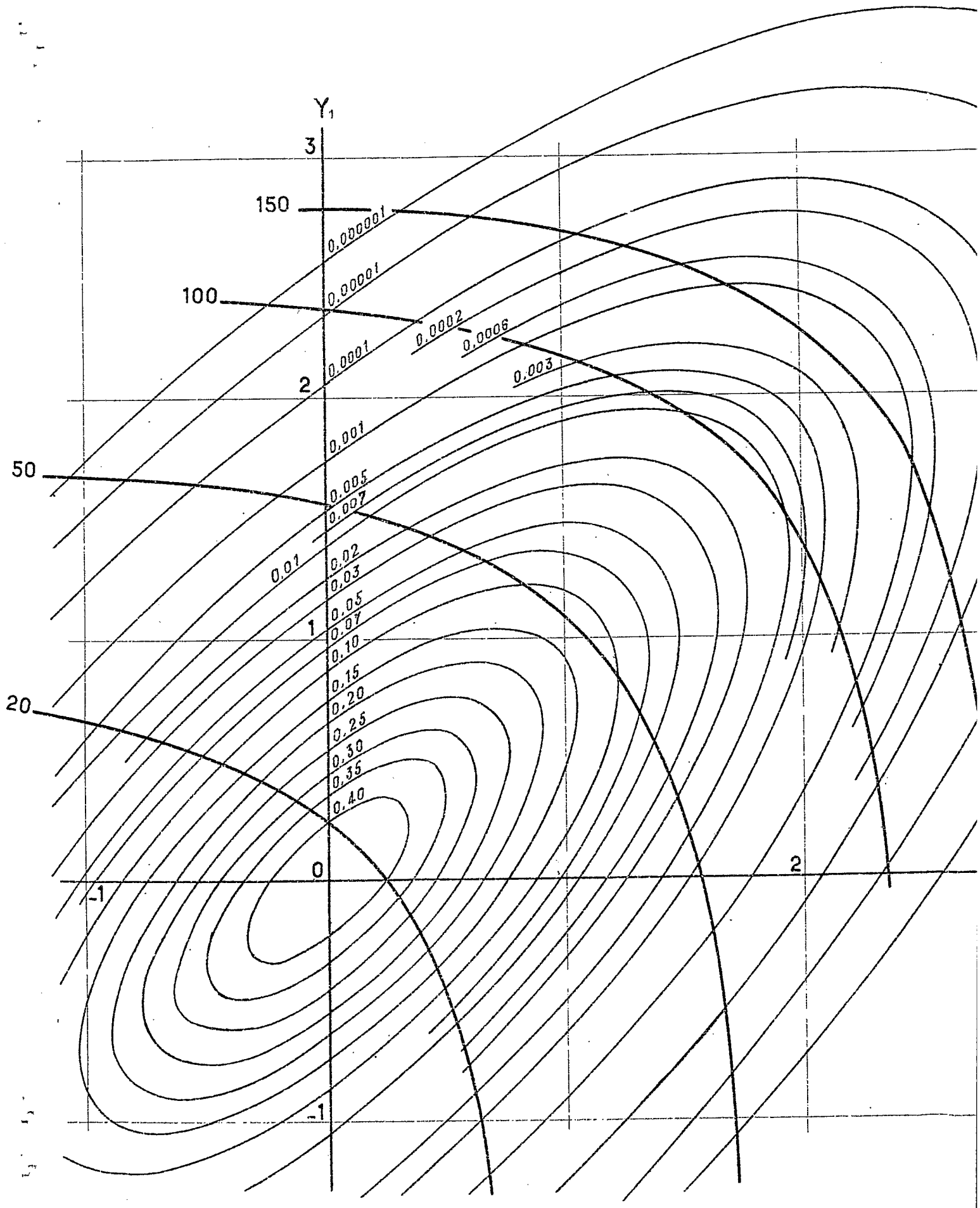

Y1
3
2
1
0
-1
-1
1
2
150
100
50
20
0.0002
0.0006
0.003
0.005
0.000001
0.00001
0.0001
0.001
0.007
0.01
0.05
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7

Gr. 6

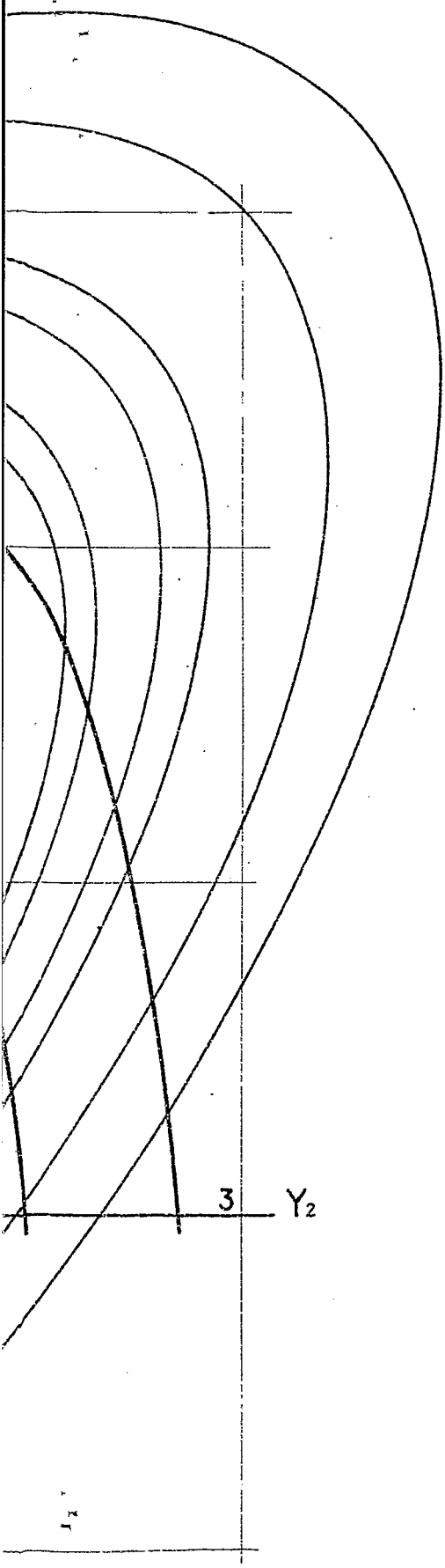


Coefficient de corrélation : 0,90

DIV. 261 001

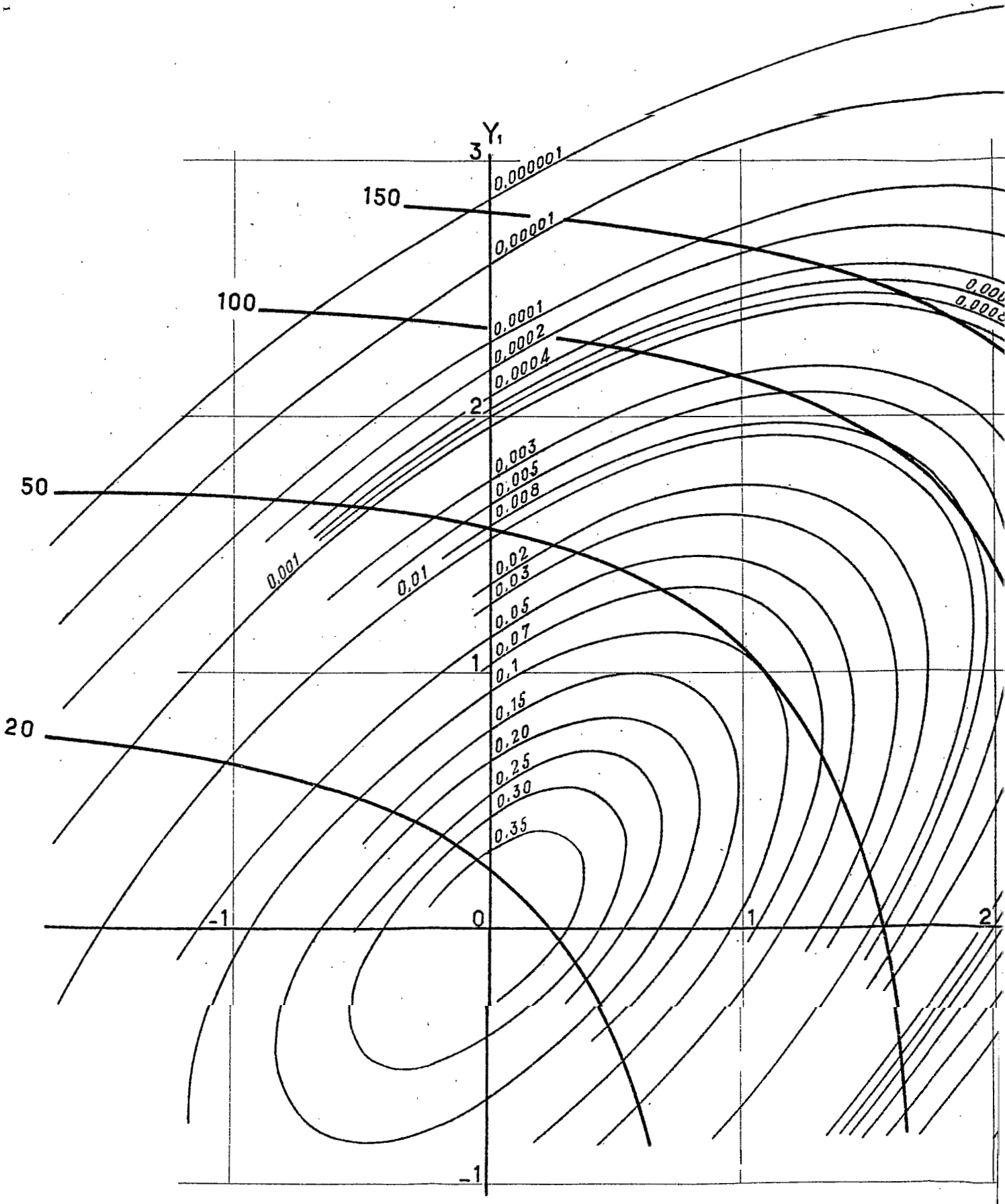

Y1
3
2
1
0
-1
-1
2
150
100
50
20
0.000001
0.00001
0.0001
0.0002
0.0006
0.003
0.001
0.005
0.007
0.01
0.02
0.03
0.05
0.07
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
0.35
0.40

Gr. 7

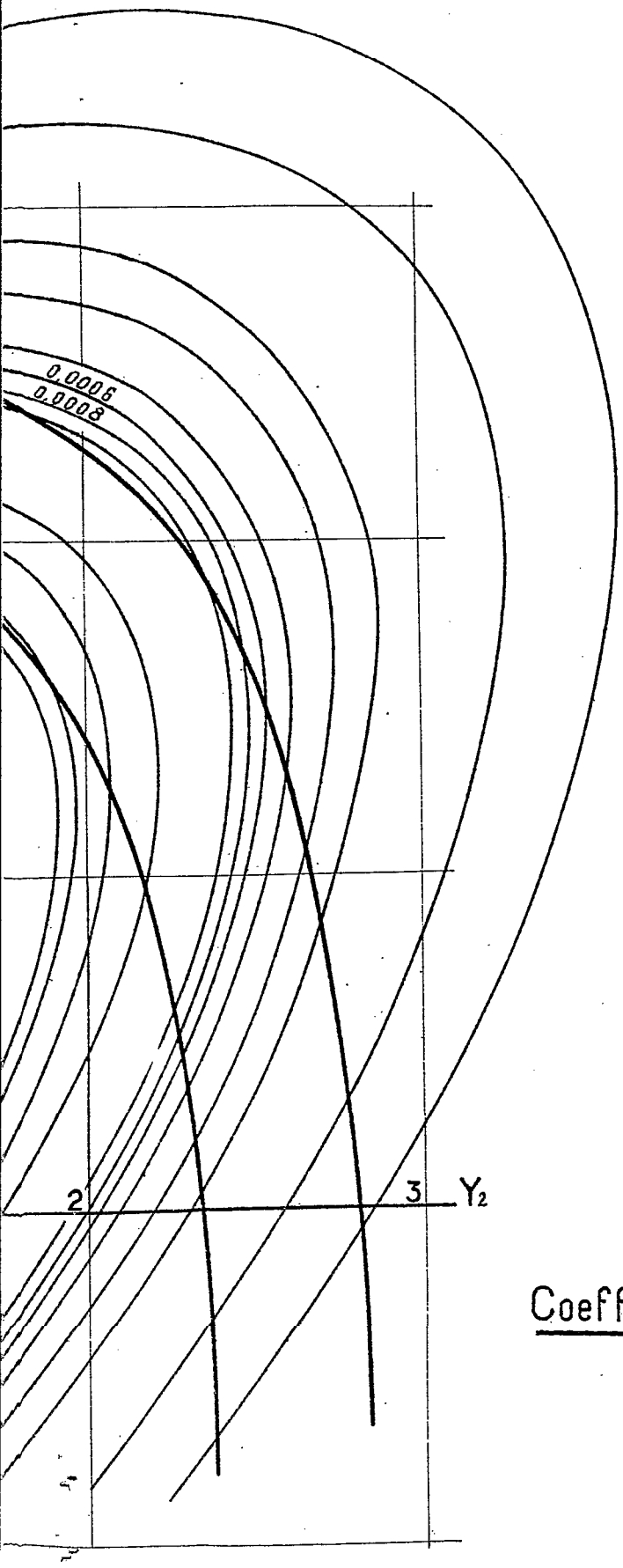


Coefficient de corrélation : 0,70

DIV. 261002

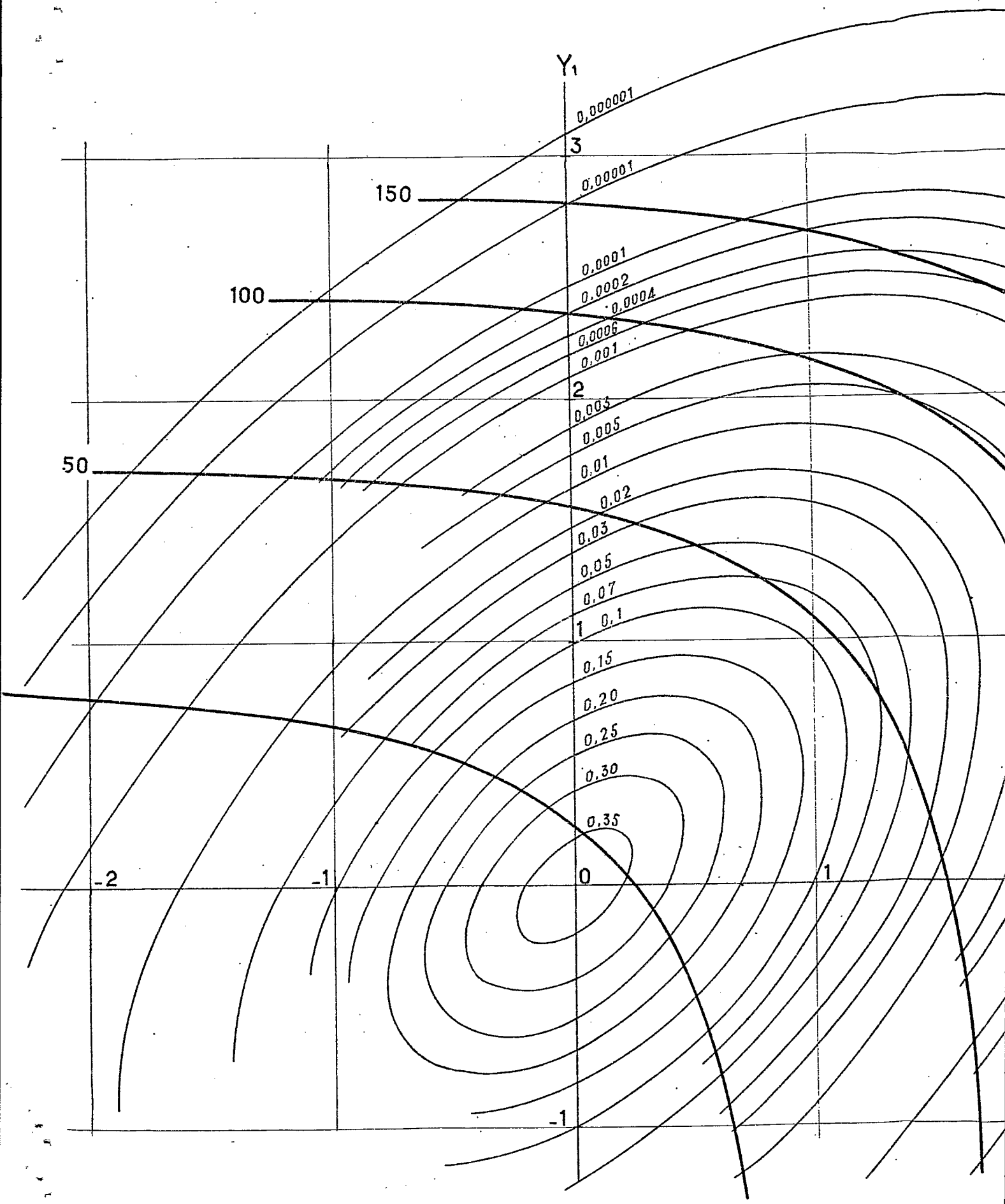

Y1
3
2
1
0
-1
-1
1
2
150
100
50
20
0,000001
0,00001
0,0001
0,0002
0,0004
0,003
0,005
0,008
0,001
0,01
0,02
0,03
0,05
0,07
0,1
0,15
0,20
0,25
0,30
0,35

Gr. 8

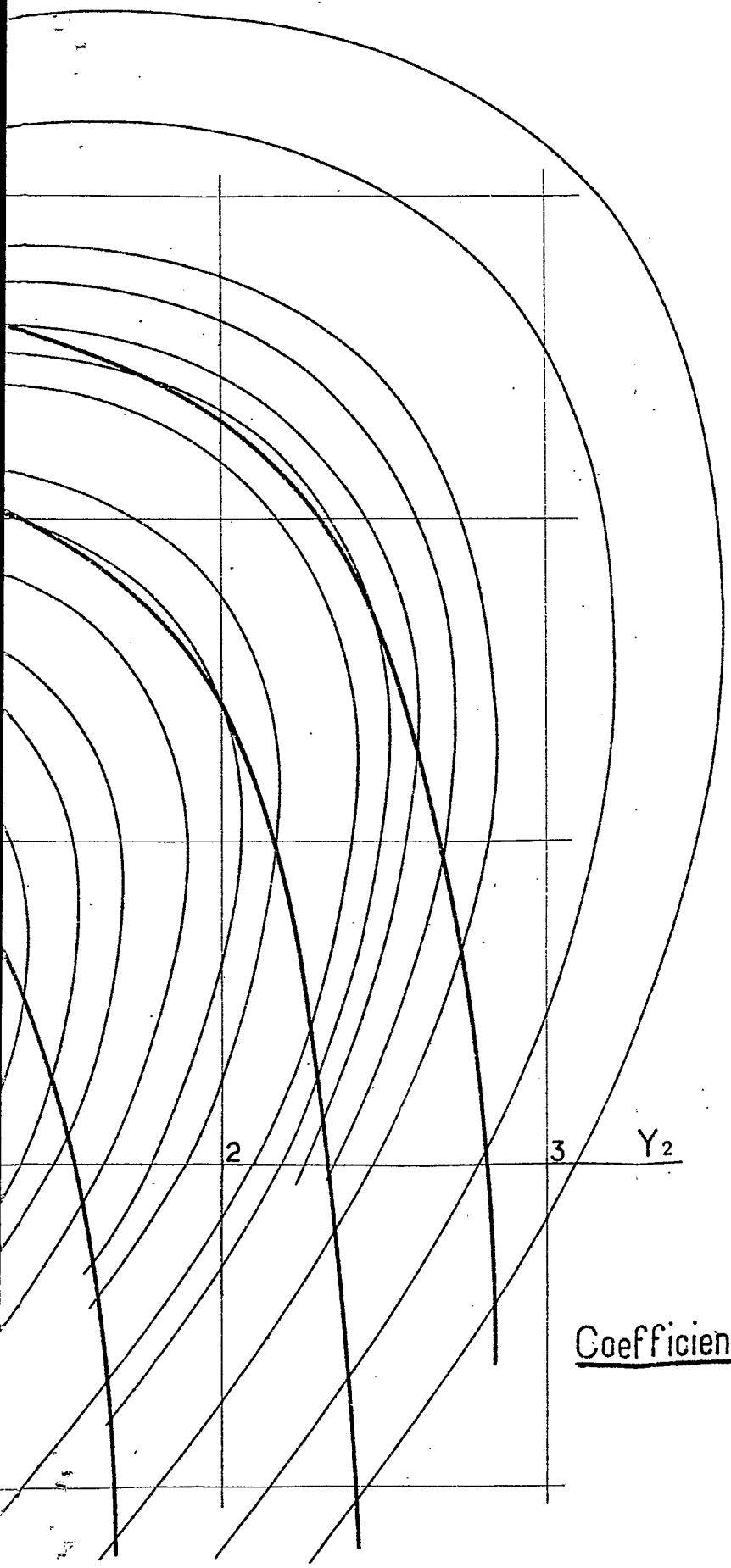


Coefficient de corrélation : 0,60

DIV. 261 003


Y1
0,000001
0,00001
0,0001
0,0002
0,0004
0,0006
0,001
0,003
0,005
0,01
0,02
0,03
0,05
0,07
0,1
0,15
0,20
0,25
0,30
0,35
150
100
50
3
2
1
0
-1
-2
-1
1

Gr.9



Coefficient de corrélation : 0,50

DIV. 261004

Dans l'exemple que nous avons pris, 1 cm^2 de la figure 8 vaut 1/25 unités $[Y_1 \times Y_2]$. L'ordonnée du graphique 11 (courbe D_s) représente une variation de densité de 0,004 par cm, tandis que 1 cm d'abscisse représente 10 cm^2 de surface S du graphique 8. La surface en cm^2 trouvée pour la courbe D_s doit donc être multipliée par $\frac{10}{25} \times 0{,}004$ pour être traduite en probabilité de dépassement. La courbe (0,60) de la figure 11 donne une surface de 35 cm^2, soit une probabilité tronquée de 0,056 et une probabilité vraie de 0,0084.

On opère ainsi pour chaque valeur de r et de z (figures 10 à 13). Les résultats se traduisent par le faisceau de courbes tracé sur la figure 14 : on a rajouté la courbe r = 1, qui correspond à la loi de probabilité de la pluie journalière ponctuelle.

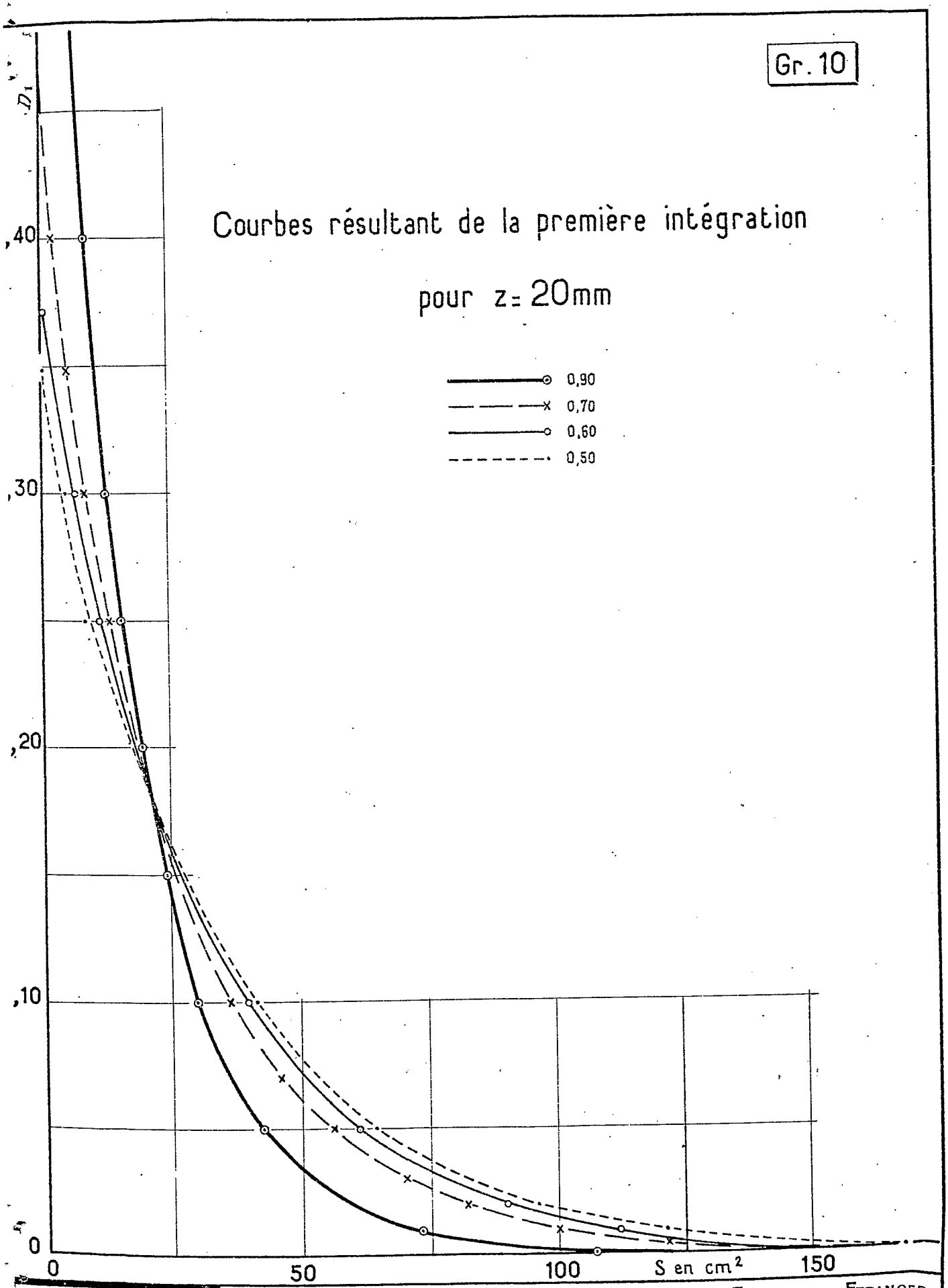
3 - Passage à la surface

Le graphique 15 associé au graphique de variation de r en fonction de la distance permet d'établir le faisceau de courbes z (d) : figure 15 sur laquelle chaque courbe z(d) est graduée en probabilité de dépassement de z.

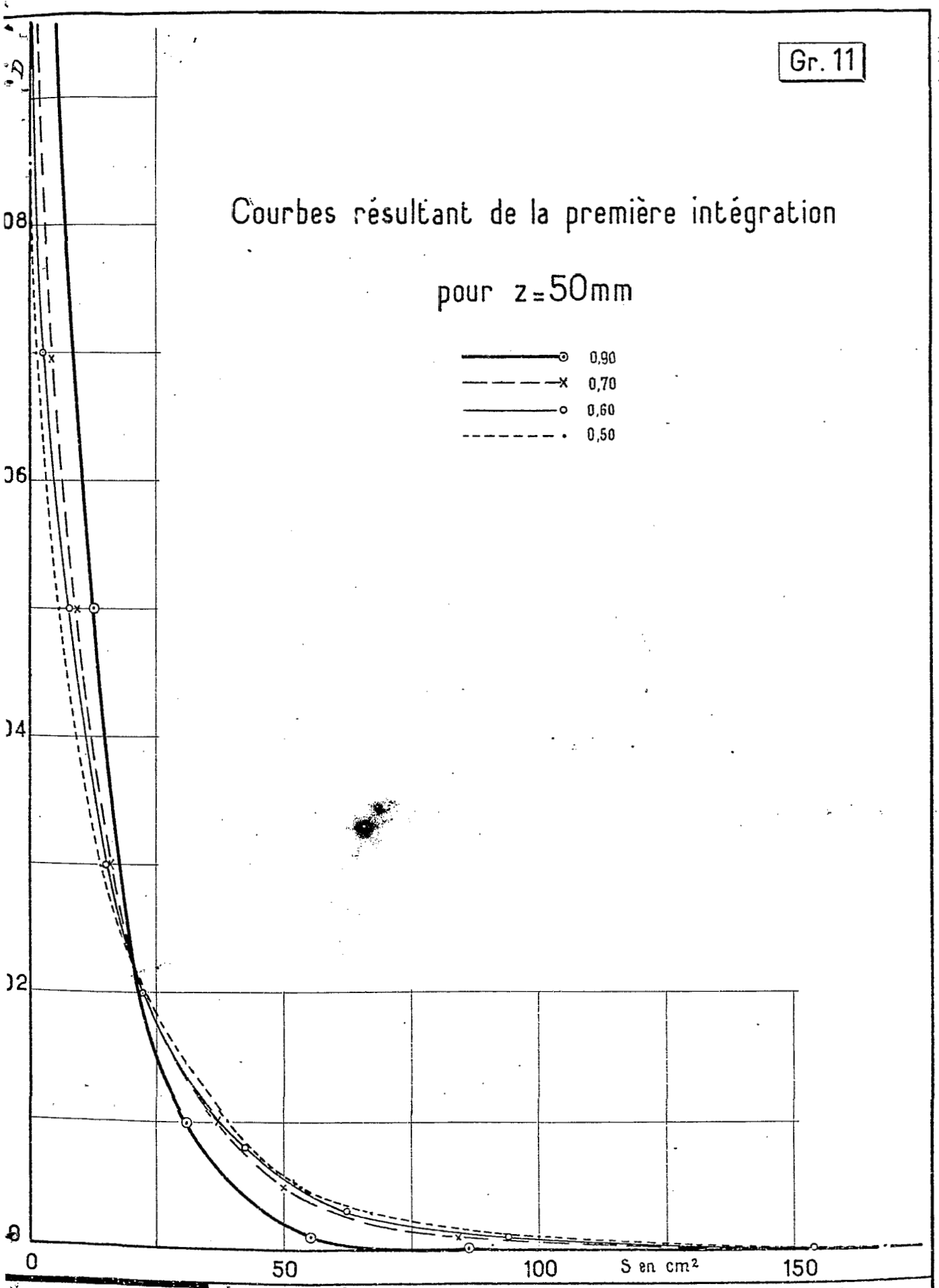
Il ne reste plus qu'à appliquer à ce faisceau la double intégration :

$$\frac{1}{L\,l} \int_0^L \left[\int_0^{x+l} z(x)dx - \int_0^x z(x)dx \right] dx$$

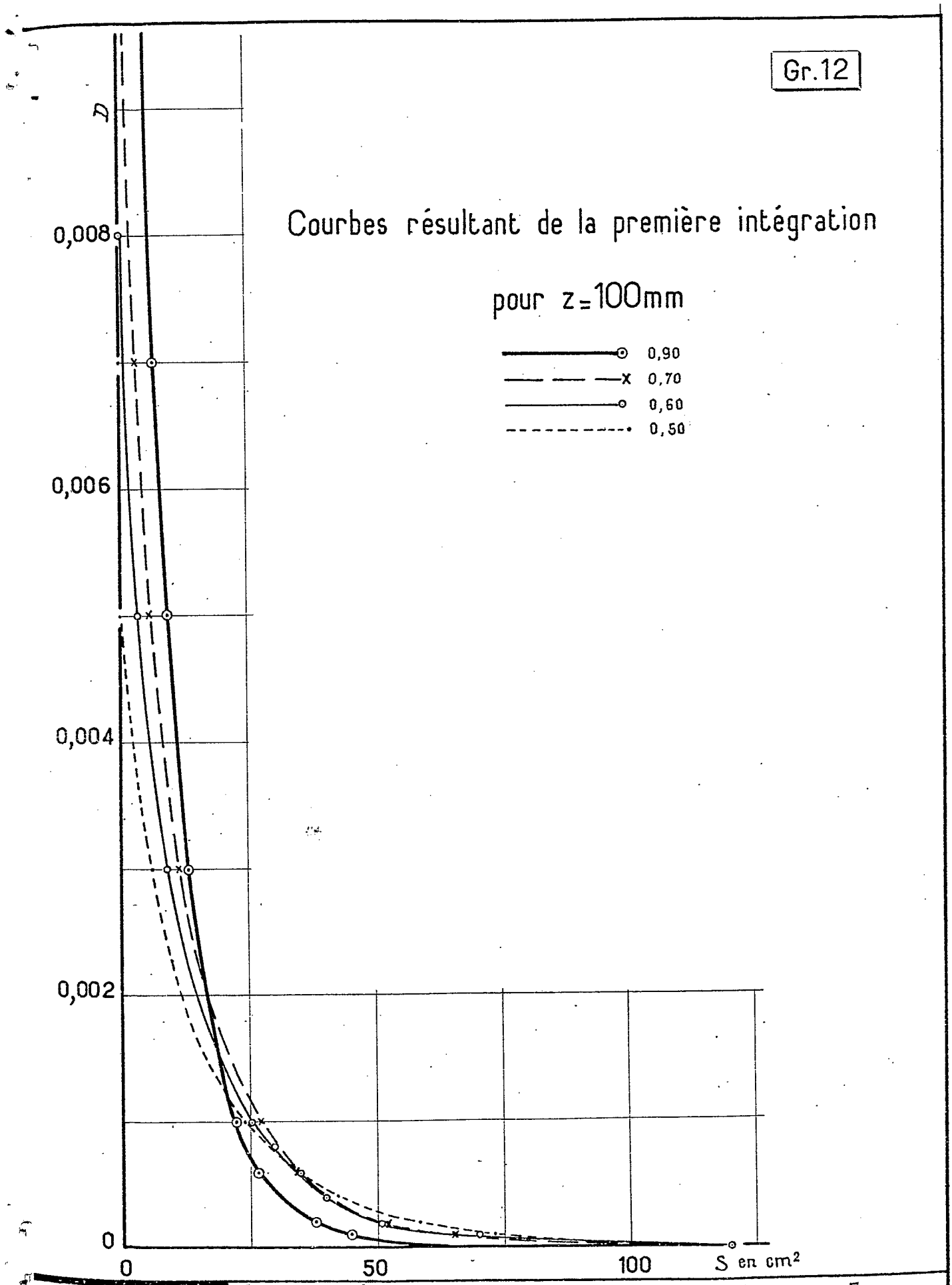
Le faisceau des courbes intégrales $\int_0^x z\,(x)dx$ est tracé sur la figure 16. On a ici L = 9,1 km, l = 5,5 km l + L = 14,6 km. Ces longueurs sont représentées en abscisses par les points a, b, c. L'intégrale précédente, pour la probabilité 0,00005 par exemple, est donnée au facteur $\frac{1}{L\,l}$ près par la surface a' a c c' moins la surface o b b' ou, ce qui revient au même, par la surface b' b c c' moins la surface o a a'.



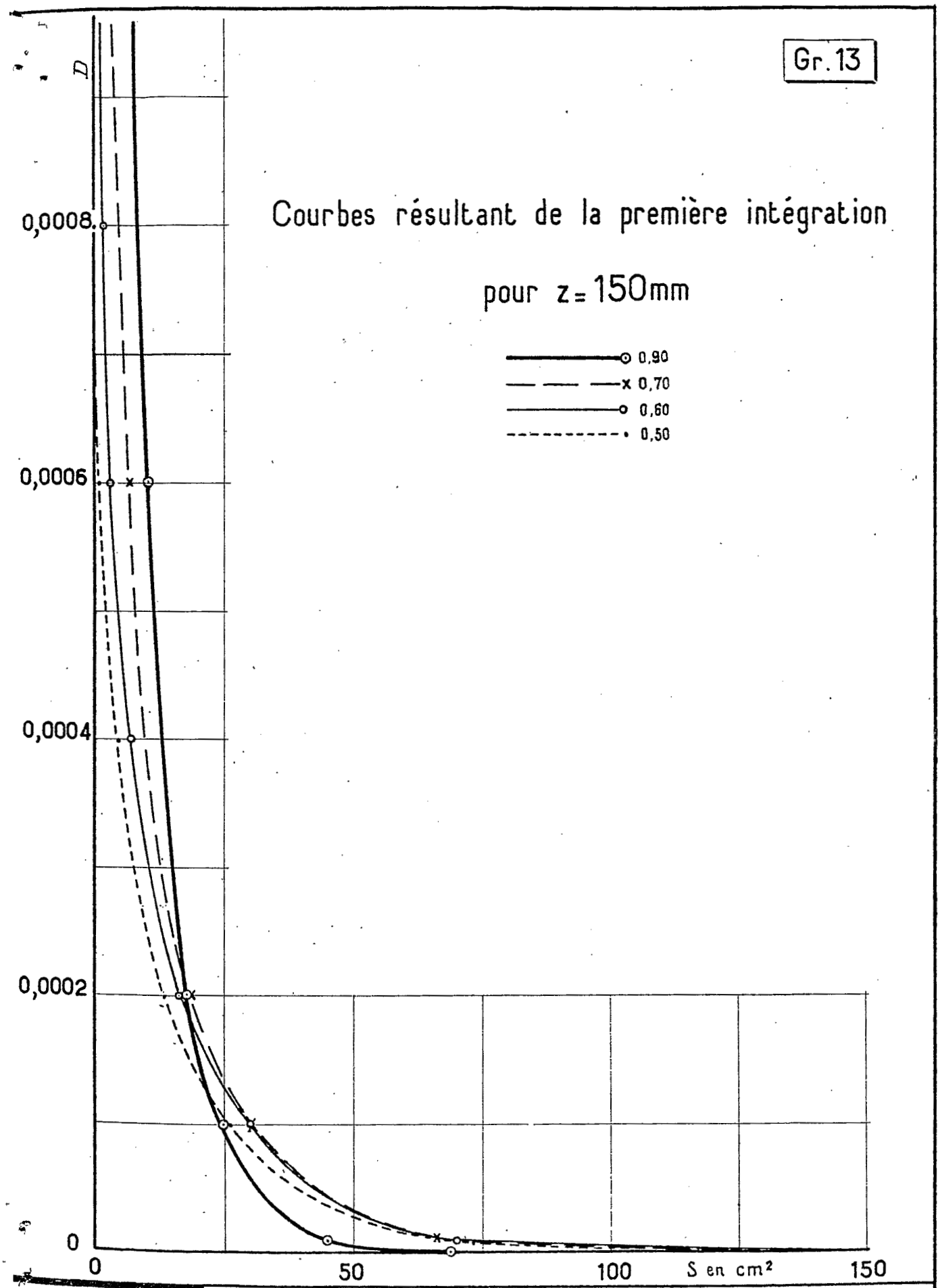
DIV. 261005	ÉLECTRICITÉ DE FRANCE Inspection Générale Union Française & Etranger				
	ED:	LE: MARS 61	DES: GROTTARD	VISA:	TUBE N°: A1



IIV. 261.006	ÉLECTRICITÉ DE FRANCE Inspection Générale Union Française & Etranger				
	ED:	LE: MARS 61	DES: GROTTARD	VISA:	TUBE N°:	A1



IV.261.007	ÉLECTRICITÉ DE FRANCE INSPECTION GÉNÉRALE UNION FRANÇAISE & ETRANGER				
	ED:	LE: MARS 1961	DES: GROTTARD	VISA:	TUBE N°:	A1



LV. 261008	ÉLECTRICITÉ DE FRANCE INSPECTION GÉNÉRALE UNION FRANÇAISE & ETRANGER				
	ED:	LE: MARS 61	DES: GROTTARD	VISA:	TUBE N°:	A1

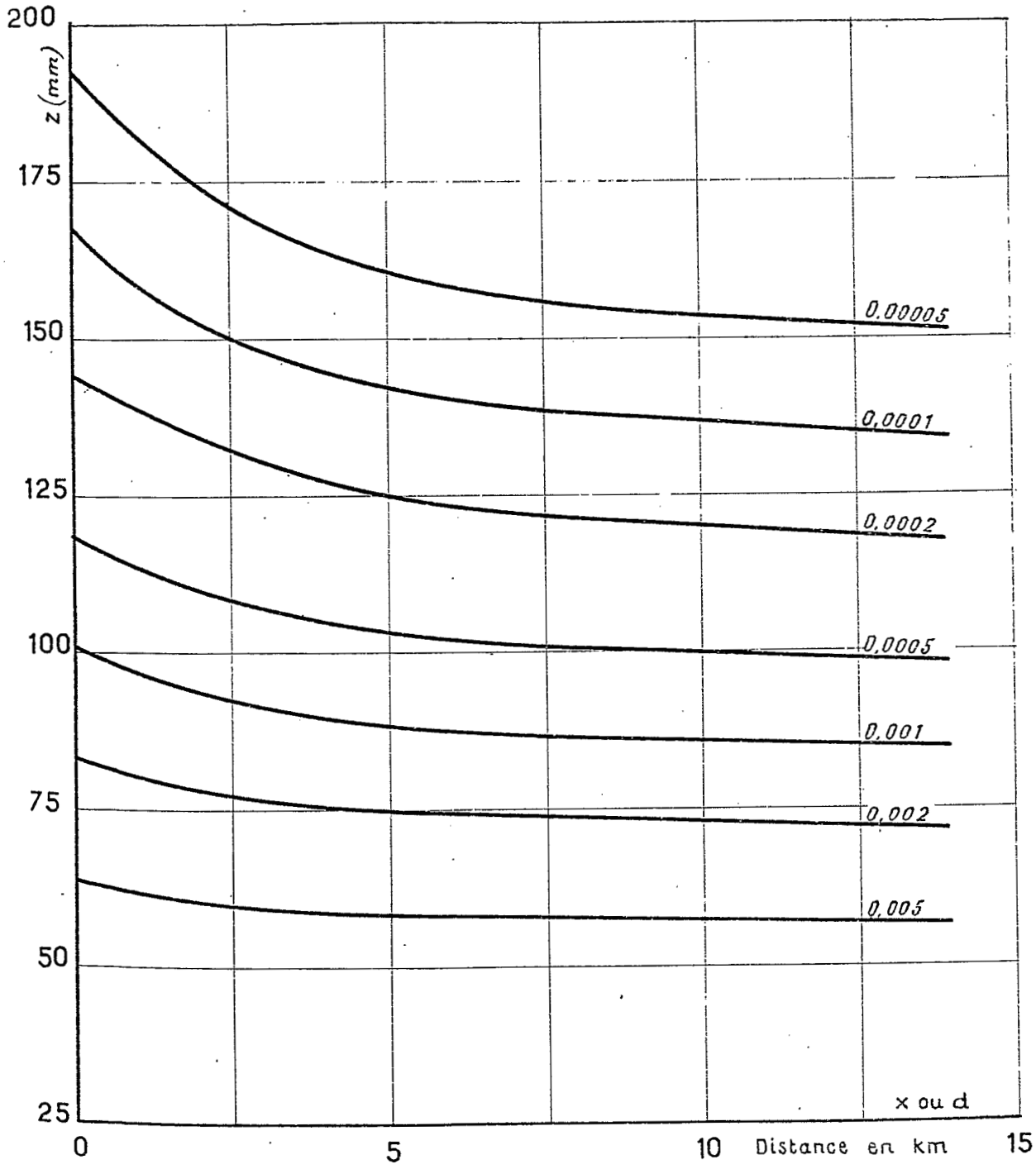
Courbes de probabilités de la hauteur moyenne de précipitation sur un couple de points pour différentes valeurs du coefficient de corrélation en y

Gr. 14

IIV.261009	ÉLECTRICITÉ DE FRANCE INSPECTION GÉNÉRALE UNION FRANÇAISE & ÉTRANGER		
ED:	LE: MAI 61	DES: GROTTARD	VISA:
			TUBE N°: A1

Gr. 15

Courbes z(d) pour différentes probabilités

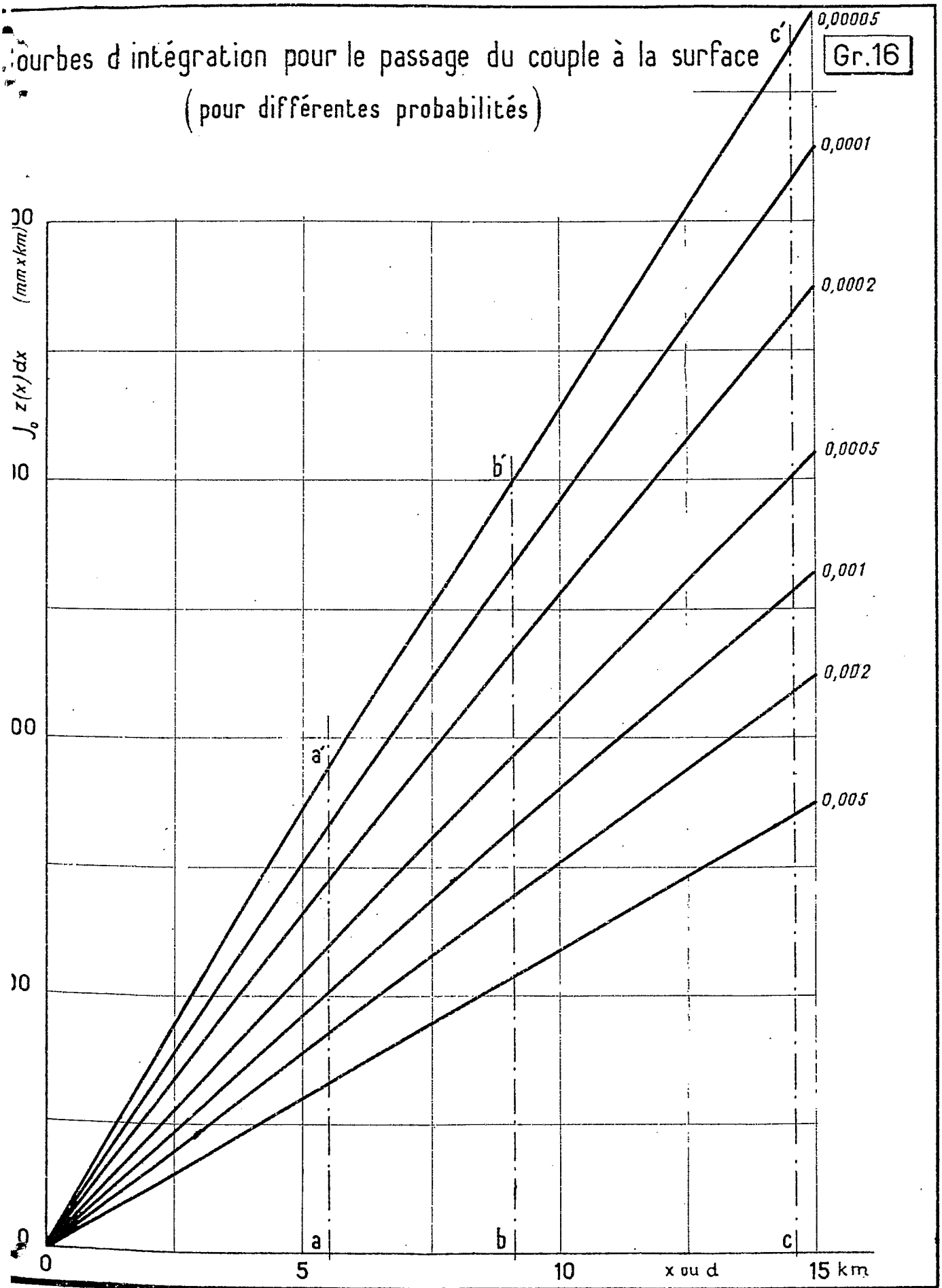


IV_261.010	ÉLECTRICITÉ DE FRANCE Inspection Générale Union Française & Etranger				
	ED:	LE: mars 61	DES: Grottard	VISA:	TUBE N°:	A1

Courbes d'intégration pour le passage du couple à la surface

(pour différentes probabilités)

Gr.16



IV_261011	ÉLECTRICITÉ DE FRANCE Inspection Générale Union Française & Etranger					
	ED:	LE: mars 61	DES: Grottard	VISA:	TUBE N°:	A1

Les résultats sont portés sur la figure 14 (courbe en tireté), qui permet d'établir le tableau suivant :

Fréquence	Pluie ponctuelle (mm)	Pluie moyenne sur le bassin (mm)	Coefficient de réduction
Annuelle (0,00274)	76	69	0,87
Quinquénnale (0,000548)	116	100	0,86
Décennale (0,000274)	134	116	0,86
Cinquantenaire (0,0000548)	190	159	0,83

Les écarts observés ne sont nullement significatifs. On pourra adopter un coefficient "prudent" de 0,87. Ceci montre que pour la gamme de pluies ci-dessus, le coefficient de réduction est pratiquement constant. Il n'en serait pas de même pour de faibles pluies pour lesquelles on ne pourrait pas admettre que le coefficient de corrélation est indépendant de la hauteur de précipitation : les calculs exposés ci-dessus seraient alors grossièrement inexacts. Mais en général ce genre d'études est surtout utile pour les fortes averses.

Nous espérons que le présent exposé a permis d'éclaircir en partie le point de vue dogmatique sur l'abattement des averses. Il est loin d'épuiser la question. De nombreux points restent à préciser et surtout les procédés de calculs restent lourds : c'est dans ce dernier domaine qu'il faudrait tout particulièrement s'attacher à trouver des améliorations pour que la méthode puisse entrer dans la pratique courante.