J. exp. mar. Biol. Ecol., 1973, Vol. 12, pp. 229–262; © North-Holland Publishing Company

ÉTUDE STATISTIQUE DE LA DISPERSION DU ZOOPLANCTON

SERGE FRONTIER

Centre O.R.S.T.O.M. de *Nosy Be, Madagascar, et Station zoologique de Villefranche-sur-Mer, France*

Résumé: L'auteur étudie l'effet des transformations $\log^p(x+1)$, p variant, sur la liaison stochastique moyenne-variance. Si la stabilisation de la variance est obtenue par une telle transformation, la relation moyenne-variance dans les nombres non transformés est représentée, en échelle log-log, par une courbe dont la pente passe progressivement de la valeur 1 pour les petites moyennes, à la valeur 2 pour les plus grandes.

Plusieurs séries de récoltes en un même point ou suivant un quadrillage de stations aboutissent à la construction de nuages de points (m, s^2) assez bien axés par une des courbes théoriques établies, pour des valeurs de p comprises entre 1 et 2. La stabilité des variances et la normalité des distributions sont ainsi obtenues par une transformation variant entre log et $\log^2$.

Une loi '$\log^p$' réalise un passage progressif de la loi de Poisson pour les petits nombres, à la loi log-normale pour les grands. Localement, elle s'identifie à une loi de Taylor correspondant à une pente comprise entre 1 et 2. Lorsqu'on augmente l'hétérogénéité des conditions d'échantillonnage (c'est à dire concrètement, lorsqu'on augmente la taille du domaine d'espace-temps à l'intérieur duquel on effectue un échantillonnage au hasard, afin de déterminer une variabilité 'résiduelle' par rapport aux prénomènes agissant à plus grande échelle), p tend vers 1, c'est à dire que les distributions tendent vers la log-normalité.

La composition d'une loi de Poisson, vérifiée en un point, par une distribution log-normale de son paramètre dans un domaine spatio-temporel plus grand, aboutit à une distribution proche d'une distribution binomiale négative dont le paramètre K est égal à l'inverse de la variance des logarithmes népériens de la variable initiale. Le modèle ne convient pas: la justification des lois statistiques observées est sans doute plus complexe. Leur dépendance vis à vis de l'échelle spatiale d'observation suggère qu'une partie des phénomènes déterminants est liée à la turbulence hydrodynamique.

Abstract: The author examines the effect of the '$\log^p$' transformation (where p varies) on the stochastic dependence between the mean and variance. If the stabilization of variance is obtained with such a transformation, then the relation variance-mean, in the non-transformed numbers, is represented in the log-log scale by a curve, the slope of which run progessively from 1 for the small values of the mean, to 2 for large ones.

Many series of replicated samples give scatter diagrams of points (m, s^2) which are approximated quite well by one of the theoretical curves, for p equal 1 to 2. The stability of variance and the normality are then obtained by the mean of a transformation between 'log and '$\log^2$'.

A '$\log^p$' distribution makes a transition between a Poisson distribution for the small numbers, and lognormal for the large ones, and is locally identical to a Taylor's law, with parameters between 1 and 2. Increasing heterogeneity of the sampling conditions, p tends towards 1, *i.e.*, the distribution tends towards a lognormal one.

Composing a Poisson distribution, with a lognormal distribution of its parameter, we obtain a near negative-binomial distribiution, the parameter K of which is equal to the inverse of the variance of the Naperian logarithm of the initial values. The model does not fit: the explanation of the observed regularities is probably more complex. The dependence upon the spatial scale suggests that a part of the phenomenon is linked to hydrodynamic turbulence.

On sait que le traitement statistique des dénombrements d'organismes dans les part échantillonnages du milieu naturel se heurte à la non-réalisation des hypothèses de

O. R. S. T. O. M.
14 NOV. 1973 Collection de Référence
6438

l'analyse de la variance. En particulier, les distributions de fréquences sont très éloignées de la normalité, et les variances très loin d'être stables. Quelques tentatives ont été faites ces vingt dernières années pour définir des distributions théoriques susceptibles de rendre compte des lois statistiques observées, et déterminer en conséquence les transformations non linéaires à appliquer aux données afin de les normaliser et de stabiliser les variances. Il ne semble pas que ces travaux aient abouti à une solution générale: les régularités mises en évidence varient en effet, dans une certaine mesure, suivant les circonstances.

L'étude qui suit, très empirique et très limitée, n'aboutit pas à la constitution d'un modèle 'explicatif'. Elle permet cependant de préciser l'énoncé du problème, en mettant en évidence l'intervention de deux facteurs à signification épistémologique. Le premier est l'influence de 'l'acte d'échantillonnage', qui se superpose à celui de la dispersion réelle des organismes dans le milieu: les ensembles numériques obtenus par l'expérimentateur sont biaisés, d'une façon impossible à éviter, par rapport à la situation 'avant observation'. Le second est l'influence de l'échelle d'observation sur les régularités statistiques observées.

Nous résumerons d'abord les connaissances actuelles, et tenterons de construire un modèle mathématique empirique adaptable à un grand nombre de situations observées. Puis nous examinerons les résultats de quelques expériences d'échantillonnages répétés et essaierons d'en tirer le maximum d'information.

Étude Empirique de la Surdispersion

L'approche la plus classique consiste à comparer les résultats d'observation avec ceux qu'implique l'hypothèse la plus simple: la dispersion 'au hasard' des organismes vivants dans la phase aqueuse. Plus précisément, on suppose que la probabilité de présence d'un individu dans un petit volume est indépendante de l'abondance à proximité. Le volume d'eau filtré lors d'une récolte planctonique étant toujours très petit par rapport à celui de la masse d'eau dont il est supposé représentatif, les ensembles numériques obtenus par échantillonnage répété doivent alors satisfaire à la loi de Poisson ($\sigma^2 = \mu$). On constate en effet que cette loi est très généralement réalisée pour les petits effectifs. Lorsque l'abondance moyenne par échantillon croît, la variance devient supérieure à la moyenne: il apparaît une surdispersion ($\sigma^2 > \mu$). Citons, par exemple, Margalef (1969) pour le phytoplancton, Barnes & Marshall (1951) and Wiebe (1970) pour le zooplancton. On caractérise souvent la surdispersion par le rapport s^2/m (rapport de la variance estimée à la moyenne estimée), dit coefficient de surdispersion de Fisher (Fisher, 1954). Ce coefficient peut etre testé à un risque que l'on se fixe: en effet la quantité $(n-1)\, s^2/m$, où n est le nombre de données, est approximativement distribuée comme un χ^2 à $(n-1)$ dimensions si l'hypothèse de la loi de Poisson est juste. On peut ainsi conclure qu'un coefficient de surdispersion n'est pas significativement différent de 1 – ce qui n'établit pas que les organismes sont répartis au hasard, mais seulement que la surdispersion est trop

faible pour etre affirmée, compte tenu du nombre de degrés de liberté. C'est ce qui a souvent lieu dans le cas des petits effectifs. La surdispersion par contre apparaît généralement quand les effectifs par échantillon augmentent, que ce soit parce que l'on considère une espèce plus abondante, ou que l'on réalise des échantillons de plus grande taille. Le coefficient de surdispersion croît avec la moyenne par échantillon donc ne peut servir à caractériser une espèce dans des conditions biologiques données, comme l'avaient laissé espérer les premiers travaux sur cette question (voir par exemple Comita & Comita, 1957).

Dans un deuxième stade de l'analyse, on constate qu'une grande partie de l'instabilité de la variance provient d'une liaison stochastique entre la moyenne et la variance. Il est d'une grande utilité de pouvoir déterminer une forme analytique, au moins approchée, de cette liaison, car il devient alors possible de déterminer mathématiquement la transformation non linéaire qu'il convient d'appliquer aux données pour normaliser les distributions et stabiliser la variance. On établit en effet (voir par exemple Kendall & Stuart, Vol. 1, p. 232 et Vol. 3, p. 88) que si une famille de distributions se caractérise par une relation moyenne-variance de la forme, $\sigma^2 = f(\mu)$ la transformation rendant la variance indépendante de la moyenne est,

$$g(x) = \int^x \frac{dt}{\sqrt{f(t)}} \tag{1}$$

(la borne inférieure de l'intégrale est arbitraire puisque l'addition d'une constante ne change pas la variance).

La relation moyenne-variance peut être approchée expérimentalement par le moyen de séries d'épreuves courtes et nombreuses, chaque série réalisant les conditions d'homogénéité les meilleures possibles. Dans le cas de l'échantillonnage planctonique, on effectuera des séries de récoltes successives dans un volume marin, et pendant une durée, petits par rapport aux échelles d'espace et de temps utilisées dans la description des phénomènes écologiques. Les conditions matérielles imposent une limite évidente à la réduction du domaine spatio-temporel et l'on doit considérer que la variabilité observée pendant la durée nécessaire à l'exécution d'une série de récoltes, et sur la distance correspondant à la dérive du bateau pendant cette durée, définit une variabilité 'de base' ou 'locale' au dessous de laquelle il est impossible de descendre. Lors de l'étude d'un facteur écologique, on comparera cette variabilité à celle obtenue dans des conditions plus hétérogènes d'échantillonnage, c'est à dire dans un domaine d'espace ou de temps de dimensions suffisantes pour que le phénomène puisse se manifester.

L'étude empirique de la liaison moyenne-variance dans des séries de dénombrements d'organismes a été réalisée un grand nombre de fois dans l'étude des biotopes marins et terrestres. Elle aboutit à une loi désormais classique dite loi de Taylor (Taylor, 1961): les points (m, s^2) se disposent, sur un graphique log–log, en un nuage rectiligne révélateur d'une liaison stochastique de la forme,

$$\log \sigma^2 = A + b \log \mu$$

ou,

$$\sigma^2 = a\mu^b$$

(a et b étant à déterminer dans chaque circonstance). On en déduit la transformation stabilisant la variance:

$$g(x) = a \int^x t^{1-b/2}\, dt$$

Si $b \neq 2$:

$$g(x) = \frac{a}{1-b/2} \cdot x^{1-b/2}$$

à une constante additive près, que l'on peut ignorer pour les raisons évoquées ci-dessus. D'autre part le facteur multiplicatif n'altère pas l'indépendance moyenne-variance puisque $m(kx) = km(x)$ et $s^2(kx) = k^2 s^2(x)$: on peut donc l'ignorer également. On retiendra:

$$g(x) = x^{1-b/2}$$

Si $b = 1$ (loi de Poisson), on trouve $g(x) = \sqrt{x}$, résultat classique. Si $b = 2$ on a,

$$g(x) = \int^x \frac{dt}{t} = \log x \text{ (logarithme népérien).}$$

Mais puisqu'un changement de base de logarithmes est une opération linéaire, n'affectant pas l'indépendance moyenne-variance, on retiendra la transformation logarithmique dans une base quelconque. Ce résultat est, lui aussi, classique.

Les valeurs de b communément rencontrées se situent entre 1 et 3. Pour $b = 3$ on effectuera la transformation $1/\sqrt{x}$. On constate qu'une fois obtenue l'indépendance, les distributions sont approximativement gaussiennes.

Loi de Taylor Généralisée

La loi de Taylor peut-elle recevoir une explication biologique? Cassie (1962, 1963) remarque que les réponses des variables biologiques aux petites variations des facteurs ambiants sont souvent de type exponentiel. Dès lors, si ces derniers ont des distributions normales à variances stables, il en sera de même des logarithmes des variables biologiques.

Le raisonnement rend compte des cas où $b = 2$. Une pente $b = 1$ traduit une loi de Poisson (surdispersion non décelable: seule intervient la variation liée à l'échantillonnage). Une pente comprise entre 1 et 2 décrit une situation intermédiaire entre la loi log-normale et la loi de Poisson. Il s'agit peut-être d'un équilibre dynamique entre

des processus biologiques très généraux, tendant à induire des distributions log-normales, et une homogénéisation du milieu liée à la diffusion et aux mouvements turbulents. De nombreuses séries d'observations, dont quelques unes seront présentées dans ce qui suit, aboutissent à un nuage de points (m, s^2) de pente passant progressivement, dans une même série de récoltes, de la valeur 1 pour les petits effectifs, à la valeur 2 pour les plus grands.

Il est toujours possible, pour les applications pratiques, de diviser l'intervalle de variation de la moyenne en intervalles plus petits à l'intérieur desquels la disposition des points peut être rapportée à une loi de Taylor. Toutefois, il serait commode de disposer d'une forme mathématique unique susceptible de rendre compte de la variation du coefficient b de la loi de Taylor en fonction de l'ordre de grandeur des effectifs par échantillon. On peut par exemple chercher une relation $b = b(\mu)$ d'où l'on déduirait la forme de la loi de Taylor généralisée;

$$\sigma^2 = a\mu^{b(\mu)}$$

Cette forme risque malheureusement d'être complexe. Nous avons suivi la voie inverse, consistant à rechercher empiriquement une transformation stabilisant la variance et à en déduire la relation moyenne-variance dans les données non transformées.

Nous avons ainsi, dans des travaux antérieurs, été amené à pondérer la transformation logarithmique usuelle, qui sur-corrige, par une élévation au carré (Frontier, 1969). Il a paru intéressant d'étudier plus généralement l'effet des transformations $(\log x)^p$, ou plus précisément $(\log (x+1))^p$ afin de pouvoir utiliser les effectifs nuls en leur assignant une valeur transformée égale à 0.

Cherchons quelle doit être la relation moyenne-variance dans l'ensemble des effectifs non transformés, pour que la stabilisation de la variance soit obtenue par transformation $(\log (x+1))^p$, que nous noterons désormais $\log^p(x+1)$ et plus simplement $\log^p$.

L'équation (1) ci-dessus équivaut à

$$f(x) = \frac{1}{(g'(x))^2}$$

la relation moyenne-variance est donc de la forme

$$\sigma^2 = \frac{1}{(g'(\mu))^2} \tag{2}$$

Si donc la transformation rendant la variance indépendante de la moyenne est

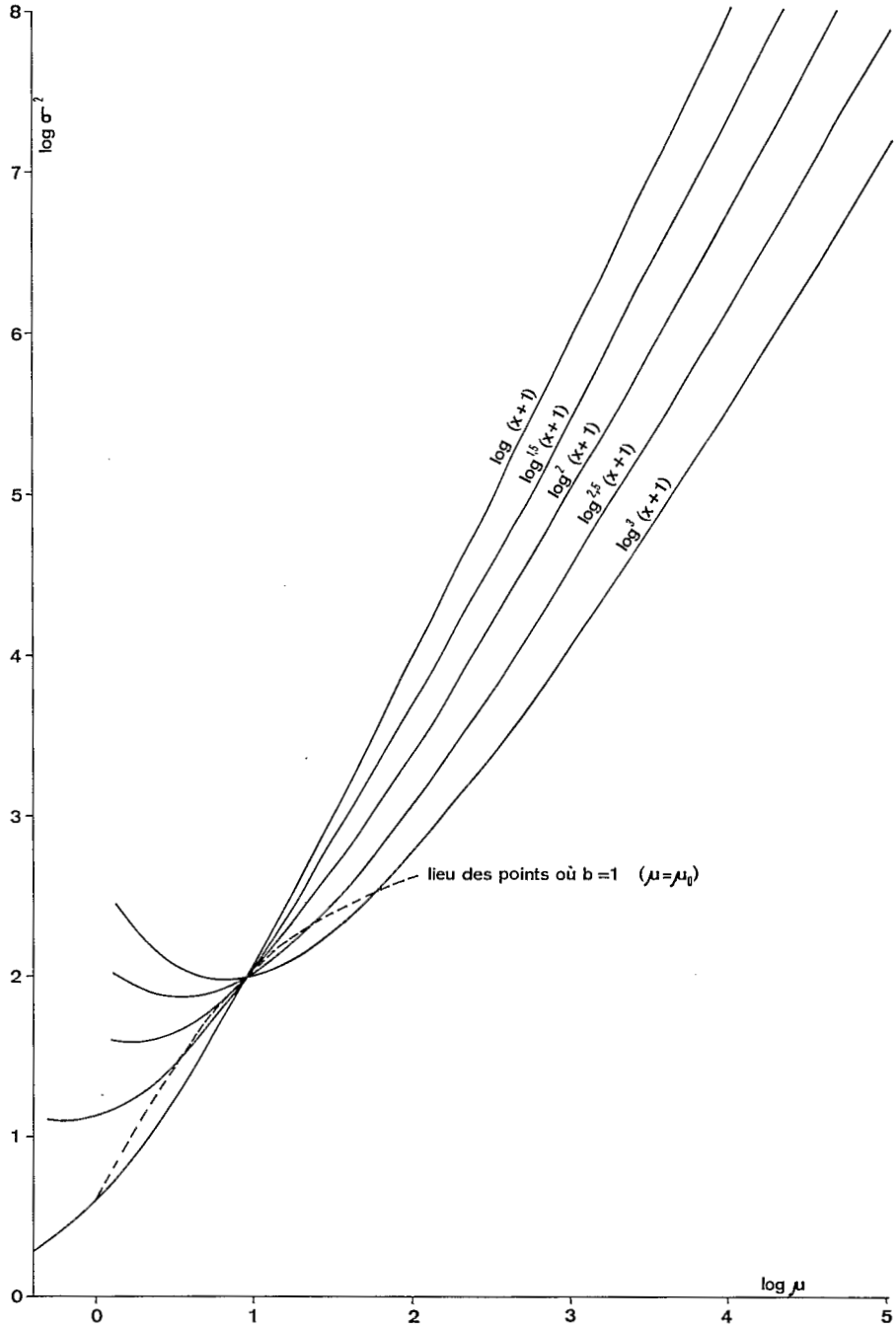

Fig. 1. Relation théorique moyenne-variance pour des familles de distributions telle que la variance est stabilisée par une transformation $\log^p(x+1)$. On a pris $p = 1$, 3/2, 2, 5/2 et 3. Ces courbes sont définies à une translation verticale près.

$$g(x) = \log^p(x+1)$$

$$g'(x) = \frac{p \log^{p-1}(x+1)}{x+1}$$

si l'on est en logarithmes népériens, et dans une autre base:

$$g'(x) = \frac{p \log^{p-1}(x+1)}{x+1} \cdot K$$

($K = 0{,}4343$ pour les logarithmes de base 10). La relation cherchée est donc

$$\sigma^2 = \left[\frac{\mu+1}{p \log^{p-1}(\mu+1)}\right]^2 \cdot \frac{1}{K^2}$$

ou sous forme logarithmique:

$$\log \sigma^2 = 2[\log(\mu+1) - (p-1) \log \cdot \log(\mu+1)] - 2(\log K + \log p)$$

Le second terme du deuxième membre est constant et traduit, dans le graphique log–log, une translation verticale n'affectant pas la pente de la courbe pour une valeur donnée de μ. On peut donc l'ignorer, et l'on retiendra:

$$\log \sigma^2 = 2[\log(\mu+1) - (p-1) \log \log(\mu+1)] \tag{3}$$

Cette fonction est représentée graphiquement à la figure 1 pour des valeurs de p égales à 1, 3/2, 2, 5/2 et 3. La pente de la courbe en un point d'abscisse $\log \mu$ est donnée par

$$\begin{aligned} b(\mu) = \frac{d(\log \sigma^2)}{d(\log \mu)} &= \frac{d(\log \sigma^2)}{d(\log(\mu+1))} \cdot \frac{d(\log(\mu+1))}{d(\log \mu)} \\ &= \frac{\mu+1}{\sigma^2} \cdot \frac{d(\sigma^2)}{d\mu} \cdot \frac{\mu}{\mu+1} \\ &= 2\left[1 - \frac{0{,}4343(p-1)}{\log(\mu+1)}\right] \cdot \frac{\mu}{\mu+1} \end{aligned} \tag{4}$$

(en logarithmes décimaux). C'est la fonction suggérée plus haut pour généraliser la loi de Taylor. Elle n'est pas simple, et nous avons préféré la déduire d'une loi de transformation simple donnée *a priori*.

Les variations de la pente $b(\mu)$ sont représentées graphiquement à la Figure 2, pour diverses valeurs de p. La pente se trouve égale à 1 pour une certaine valeur μ_0, variant sur les exemples données de 1 pour $p = 1$, à 57 pour $p = 3$. Au voisinage de ces faibles valeurs l'effet de la transformation $\log^p$ se superpse à celui de la transformation racine carrée; μ croissant, la pente augmente, tendant asymptotiquement vers 2 d'autant plus lentement que p est grand. En d'autres termes l'effet de la transformation $\log^p$ tend lorsque la moyenne augmente vers celui de la transformation log, d'autant plus lentement à mesure que p croît.

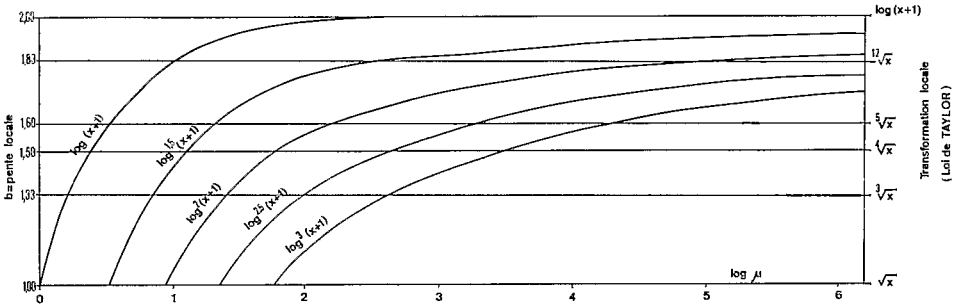

Fig. 2. Variations de la pente des courbes de la figure précédente, en fonction de la moyenne μ.

Pour les valeurs de μ inférieures à μ_0 la pente de la courbe $\sigma^2 = f(\mu)$ devient inférieure à 1; la fonction passe en fait par un minimum, puis tend vers $+\infty$ quand μ tend vers 0. Le modèle ne convient plus, ce qui illustre sa valeur d'approximation numérique, valable seulement dans un certain intervalle de variation. On admettra que pour les valeurs de μ inférieures ou égales à μ_0 la loi de Poisson est toujours réalisée: on prolongera donc la courbe à gauche de μ_0 par la tangente en μ_0 de pente 1. Rappelons que les courbes $\sigma^2 = f(\mu)$ ont été définies à une translation verticale près; il faudra donc caler en hauteur chacune d'elles de façon à ce que sa tangente de pente 1 coïncide avec la première diagonale, qui caractérise la loi de Poisson. On obtient un faisceau de courbes tangentes à la première diagonale, confondues avec elle à gauche du point de contact, et s'en écartant à droite d'autant plus lentement que p est grand (Fig. 3). La limite est à gauche la courbe correspondant à la transformation $\log(x+1)$ (convergence uniforme), et à droite la première diagonale (convergence simple).

La valeur de p sera déterminée empiriquement en choisissant une courbe du faisceau axant au mieux le nuage des points observés [1]. Nous appliquerons la méthode, à titre d'illustration, à trois séries de récoltes.

[1] On pourrait également penser à effectuer sur les données une transformation logarithmique simple, puis à observer sur le nouveau graphique ($\log m$, $\log s^2$) la pente du nuage; si b est cette pente on appliquera la transformation $x^{1-b/2}$ aux données transformées, donc la transformation $\log^{1-b/2}$ aux données initiales. Cette méthode est toutefois incertaine: les variances des quantités $\log x$ sont en effet plus dispersées que les moyennes, et il est difficile d'assigner au nuage de points une pente précise (*cf.* Fig. 5).

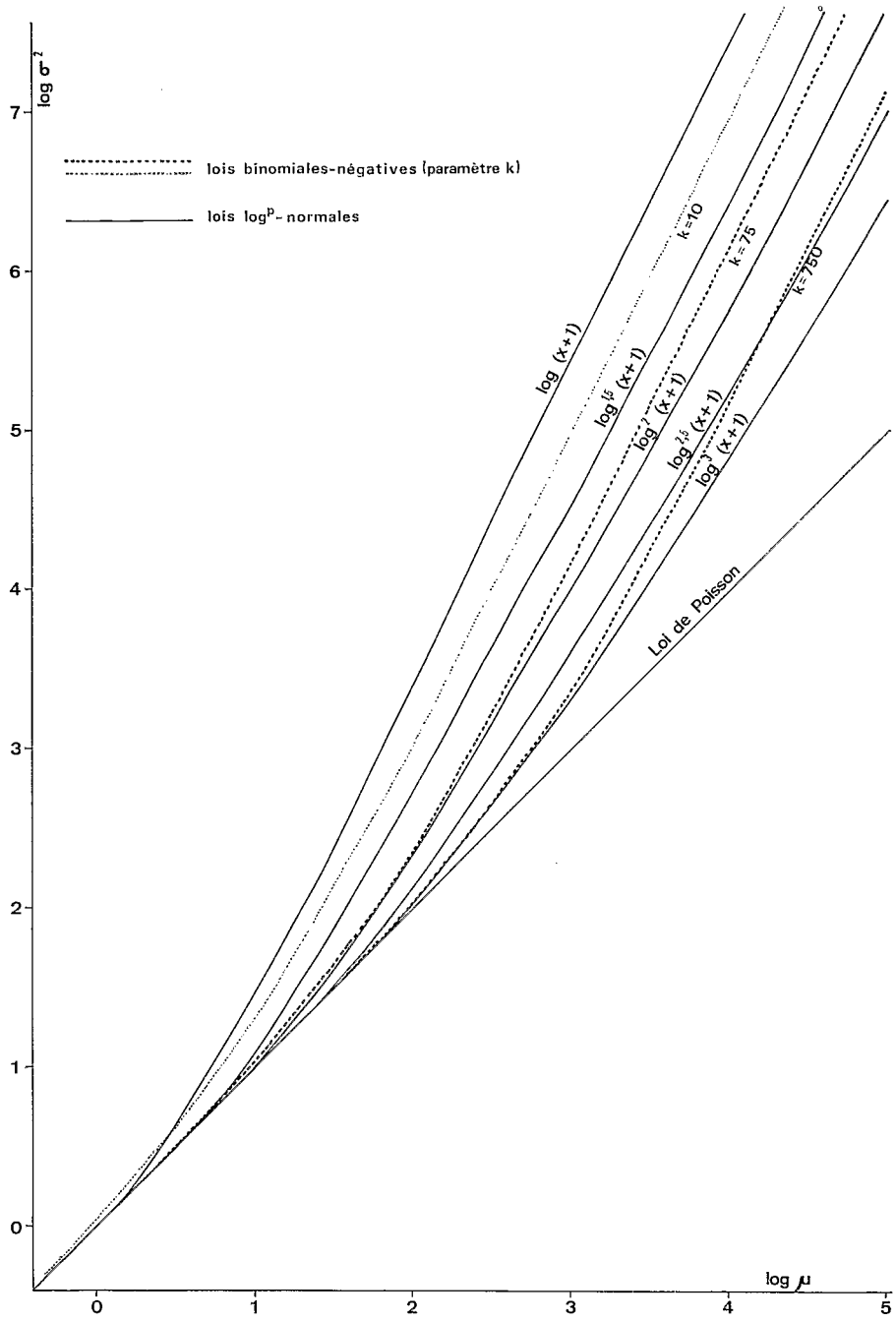

Fig. 3. Familles de distributions utilisées dans cet article. Le faisceau de courbes, $\log^p$, est obtenu à partir des branches supérieures des courbes de la Fig. 1, déplacées verticalement de façon à ce qu'elles soient tangentes à la première diagonale, et confondues avec cette tangente à gauche du point de contact.

Étude d'une Série de 32 Récoltes Successives en un Même Point

Le 16 octobre 1968, à Nosy Be 32 traits successifs de 2 min ont été réalisés avec un filet horizontal fermant, sur un trajet de 120 m repéré par des bouées. Compte tenu du temps de manipulations entre deux récoltes, l'opération complète a duré 5 h (08.30 à 13.30) pendant lesquelles le peuplement est resté faunistiquement homogène. Les comptages, effectués sur un quart aliquote de chaque récolte (fractionnement à la poire: Frontier, 1972), ont porté sur les 16 catégories zoologiques suivante

Sagitta enflata Grassi
Acartia amboinensis Carl
Lucifer spp. protozoés
Lucifer spp. mysis
Lucifer spp. jeunes postlarves
Lucifer spp. adultes
Pseudeuphausia latifrons Sars
Evadne tergestina Claus
Penilia avirostris Dana
Zoés de Décapodes Brachyoures
Atlanta gaudichaudi Souleyet
Creseis acicula Rang véligères
Creseis acicula jeunes et adultes
Creseis chierchiae Boas véligères
Creseis chierchiae jeunes et adultes
Dolioles

Puisqu'il s'agit d'observer les variations de la variance en fonction de la moyenne, il est légitime de se demander si les differentes façons de faire varier la moyenne sont équivalentes. Trouve-t-on la même relation si l'on fait varier l'espèce pour une même série de récoltes, ou pour une même espèce les conditions (spatio-temporelles ou techniques) d'échantillonnage? La première méthode est évidemment la plus économique, puisque la corrélation peut être décelée à l'aide d'une seule série de récoltes; dans la seconde option, on est obligé de disposer de plusieurs séries de prélèvements, effectuées dans des conditions suffisamment variées pour que les variations d'ordre de grandeur des effectifs de l'espèce soient appréciables. Dans un premier temps, nous associerons les deux méthodes.

Corrélation moyenne-variance pour des groupes de 4 récoltes successives

Au cours de l'exécution de la série de prélèvements, les conditions ambiantes ont quelque peu varié. Afin de rétablir une homogénéité des conditions d'échantillonnage, nous avons subdivisé les 32 récoltes en 8 groupes de 4 récoltes successives. Chaque groupe correspond à un intervalle de temps de 40 min et fournit 16 points (m, s^2) relatifs aux 16 catégories zoologiques. Dans 10 cas l'effectif était nul pour les 4 récoltes, et il n'a pas été tenu compte de la donnée. On obtient au total 118 points, représentés sur la Fig. 4.

Pour les petites valeurs, les points sont groupés au voisinage de la droite définissant la loi de Poisson [1], puis le nuage s'en écarte rapidement. La superposition

[1] La loi de Poisson ne correspond pas, sur le graphique, à la première diagonale mais à la droite $y = x+0{,}60$. En effet, les comptages ayant été effectués sur des quarts de récolte et ramenés aux récoltes totales, les moyennes sont multipliées par 4 et les variances par 16, d'où $\sigma^2 = 4\mu$.

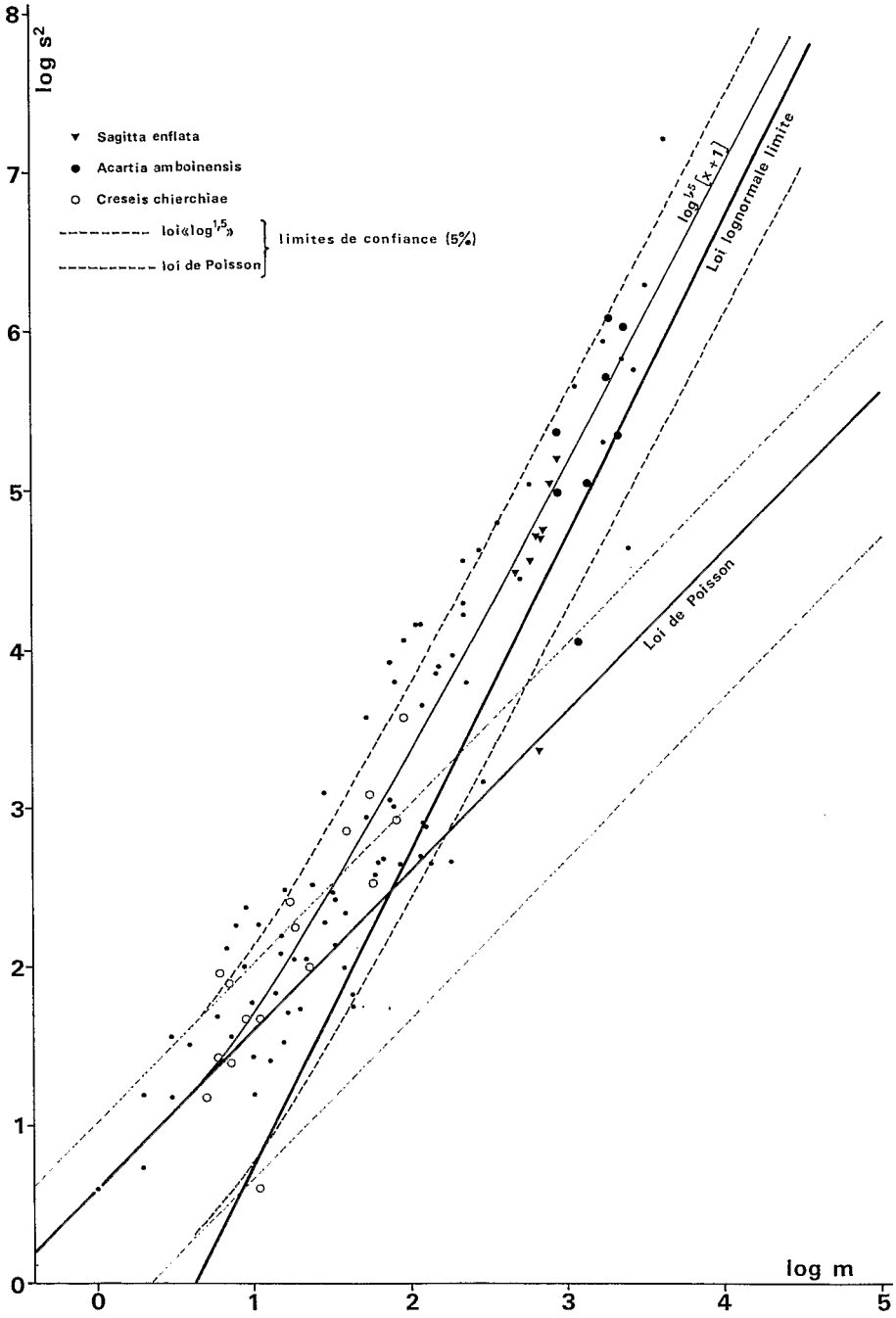

Fig. 4. Points (moyenne, variance) pour la série de 32 récoltes station 10. Paramètres calculés par groupes de 4 récoltes consécutives, sur les effectifs non transformés.

du nuage avec le faisceau de courbes de la Fig. 3, après déplacement vertical faisant coïncider les droites correspondant à la loi de Poisson, conduit à choisir pour stabiliser la variance la transformation $\log^{3/2}$ pour les valeurs supérieures à $\mu = 4$, et à gauche de cette valeur une transformation proportionnelle à $\sqrt{x}$ (précisément 0,29 $\sqrt{x}$ afin qu'il y ait continuité entre les deux lois).

On constate une forte dispersion de s^2 pour toute valeur donnée de m, ce qui n'a rien de surprenant étant donné le petit nombre de degrés de liberté pour l'estimation de chaque variance. D'autre part les écarts inférieurs semblent souvent plus importants que les écarts supérieurs. Celà tient à la nature des variables aléatoires m et s^2, qui n'ont pas des distributions indépendantes puisqu'elles sont calculées à partir des mêmes ensembles numériques: l'intervalle de confiance de la loi présumée est alors dissymétrique. En effet, si l'on admet une relation théorique $\sigma^2 = f(\mu)$, et si m et s^2 sont estimées à partir de n observations, alors la quantité $(n-1)s^2/f(m)$ est approximativement distribuée comme χ^2_{n-1} (généralisation du calcul de Fisher, 1954). Dans notre exemple n = 4 d'où, au risque 5 %:

$$3\, s^2/f(m) = \chi^2_3\, \varepsilon \quad (0{,}352;\ 7{,}815)$$

d'où,

$$\log s^2 - \log f(m)\, \varepsilon \quad (-0{,}93;\ +0{,}42)$$

(l'intervalle serait moins dissymétrique pour des valeurs plus grandes de n). Les limites de confiance de la loi de Poisson et de la loi $\log^{1,5}$ sont représentées sur la Fig. 3 (trait interrompu). On constate, en fait, que les points situés en dehors du domaine de confiance ainsi défini sont au nombre de 26, soit 22 % du total, au lieu des 5 % escomptés. D'autre part les valeurs de s^2 'trop grandes' sont plus nombreuses que les valeurs 'trop petites'. Cela tient sans doute au caractère approximatif de la loi, et surtout au fait que la liaison moyenne-variance ne rend pas compte à elle seule de la variabilité du deuxième paramètre. Le sous-échantillonnage ajoute d'ailleurs une composante supplémentaire, qui n'a pas été introduite dans le modèle. Ce dernier peut néanmoins être utilisé comme une première approximation. On vérifie aisément la stabilisation de la variance obtenue par transformation: la Fig. 5 représente les diagrammes moyenne-variance après transformation, a) log, b) $\log^{3/2}$, et, c) $\log^2$. Afin d'alléger la figure, nous y avons porté seulement les points correspondant aux trois espèces déjà repérées sur la Fig. 4. Nous avons tracé en procédant par identification des points situés de part et d'autre de l'axe et des limites de confiance de la Fig. 4, ce que deviennent ces lignes après la transformation. On obtient des courbes (trait plein pour l'axe, trait interrompu pour les limites de confiance) dont l'aspect irrégulier tient au fait qu'elles sont elles-mêmes des élément aléatoires, non déterminables exactement. Cette indétermination sur l'axe et les limites de confiance n'empêche pas de constater l'existence d'une corrélation négative entre moyenne et variance après transformation log (la transformation logarithmique surcorrige la liaison stochastique, ainsi que nous l'avons signalé précédemment), positive après transformation $\log^2$. Les coefficients de corrélation ont été calculés

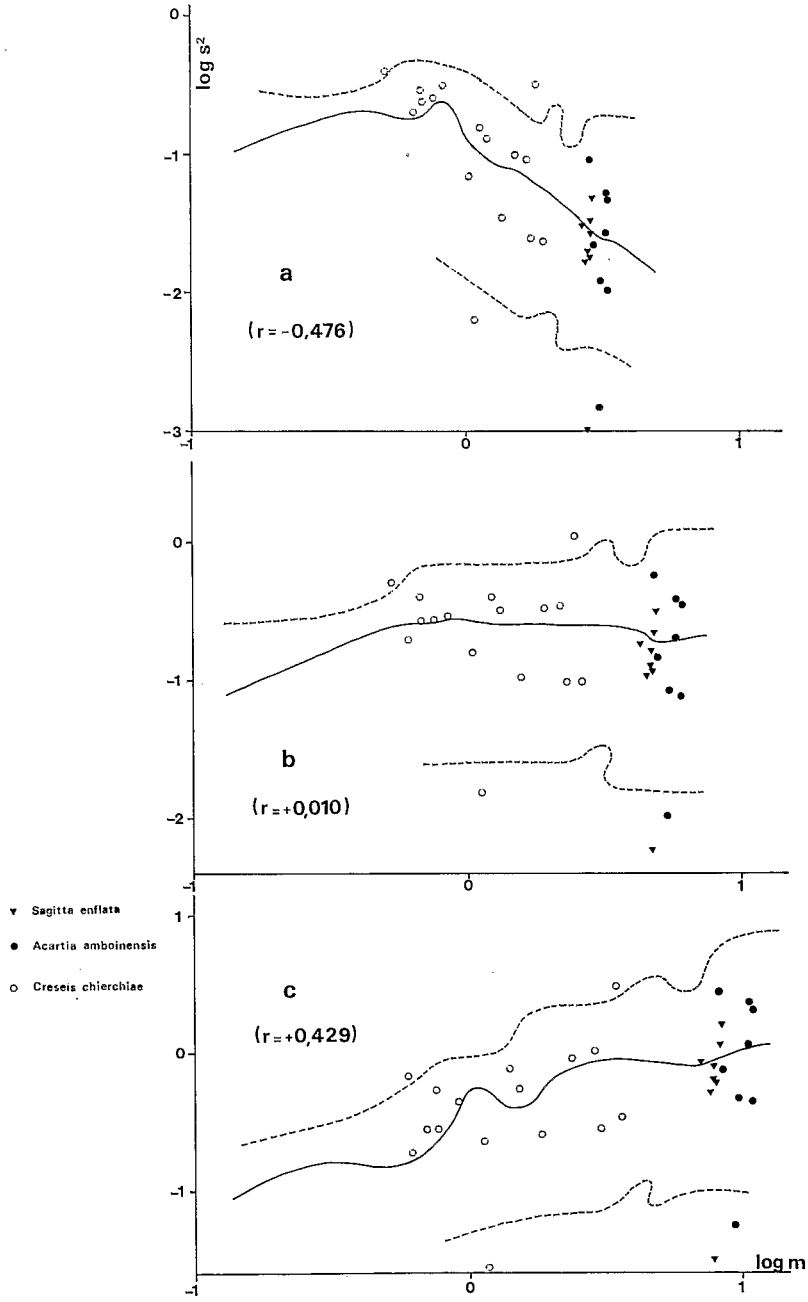

Fig. 5. Points (moyenne, variance) pour la série de 32 récoltes à la station 10. Paramètres calculés par groupes de 4 récoltes consécutives, après transformation; a, log; b, $\log^{3/2}$; c, $\log^2$ sur les effectifs.

à titre d'indices de liaison – sans préjuger de leur significativité –: on trouve $r = -0{,}476$ après transformation log, $r = +0{,}429$ après transformation $\log^2$. Seule la transformation $\log^{3/2}$ semble fournir l'indépendance cherchée avec $r = +0{,}010$.

Si nous appliquons le test d'homogénéité des variances (Bartlett, 1937) aux 118 estimations effectuées après transformation $\log^{3/2}$, chacune d'elles avec 3 degrés de liberté, nous trouvons, $\chi^2_{117} = 252{,}15$ alors que le maximum admissible au risque 1 % est égal à 173,35. La variance, rendue indépendante de la moyenne, n'a pas pour autant été rigoureusement stabilisée: il reste la composante de sa variabilité due à

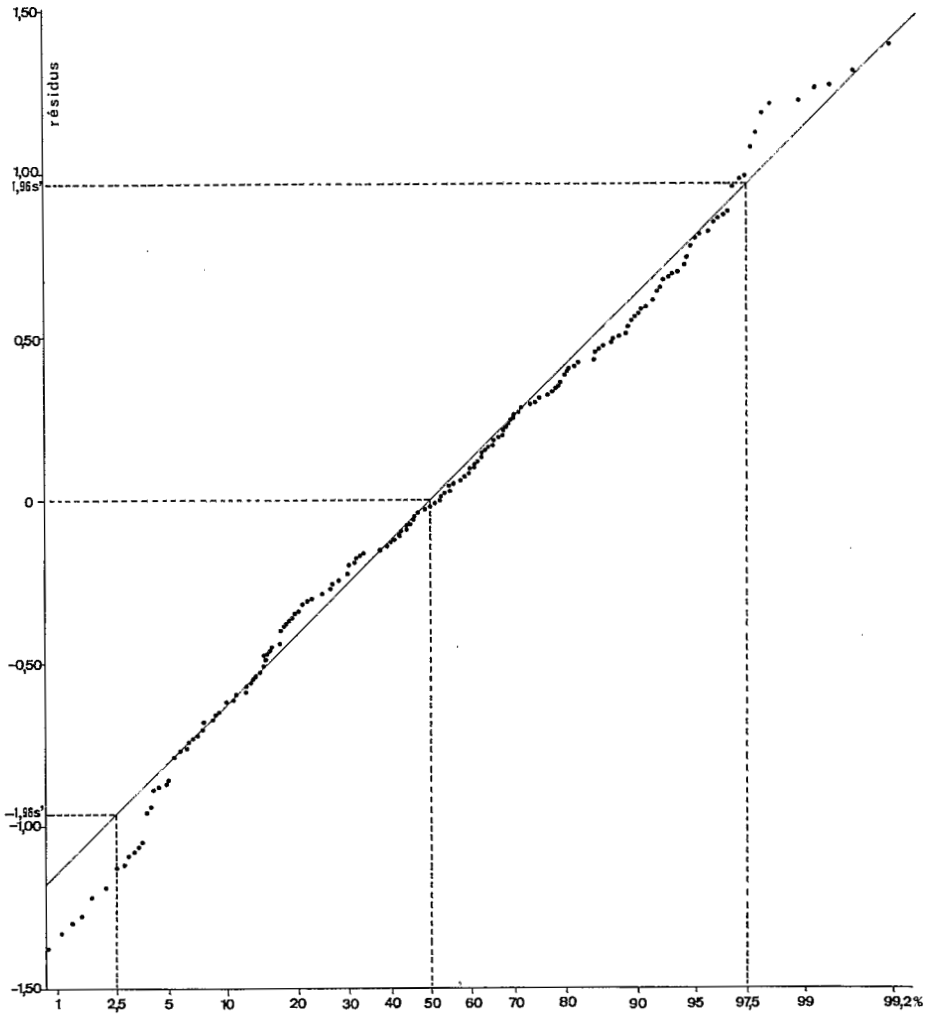

Fig. 6. Série de 32 récoltes station 10. Groupes de 4 récoltes. Distribution des fréquences cumulées des résidus après transformation $\log^{3/2}$ (transformation probit sur les fréquences).

l'hétérogénéité des populations, et également au sous-échantillonnage. Cette constatation rejoint la remarque faite plus haut.

La normalité approximative de la distribution des résidus est vérifiée par la méthode des probits. L'alignement des points représentant les effectifs cumulés, ainsi que l'indique la Fig. 6, est quasi-rectiligne dans sa partie centrale. On observe une certaine leptocurtosis, qui n'interdit pas de déterminer graphiquement l'intervalle (2,5 %; 97,5 %), dont le quart de l'amplitude est trouvé égal à $s' = 0{,}4898$ d'où $s'^2 = 0{,}2399$. Cette dernière valeur, si les $4 \times 118 = 472$ résidus étaient indépendants, serait une estimation de la variance avec 471 degrés de liberté. Mais les résidus sont liés par 118 relations linéaires indépendantes, de sorte que s'^2 est une sous-estimation de leur variance: sa valeur doit être multipliée par le rapport (472-1)/(472-118); on trouve $s^2 = 0{,}3193$. Le calcul direct donnait $s^2 = 0{,}3493$. Cette différence peut être attribuée à l'influence des écarts extrêmes, plus importants en valeur absolue que d'après la distribution normale suggérée. Il nous a paru préférable de retenir la première estimation, ce qui revient à adopter comme modèle de distribution celui suggéré par la partie centrale, assez bien normalisée, du graphique, et à négliger les parties extrèmes dont la signification est douteuse.

CORRÉLATION MOYENNE-VARIANCE DANS DES CONDITIONS PLUS SPÉCIFIQUES

Si l'on considère séparément les 16 taxons, on constate que l'intervalle de variation de la moyenne est généralement trop petit pour qu'il soit possible d'assigner une pente au nuage de points. Les points se rapportant à trois espèces ont été distingués sur les Figs 4 et 5. Ceux se rapportant à *Creseis chierchiae* représentent les comptages séparés des véligères et des stades post-larvaires; le nuage de 16 points ne se singularise pas, localement, de la loi d'ensemble.

Si à l'inverse on porte sur le graphique les points se rapportant aux divers taxons pour un seul des 8 groupes de 4 récoltes, on obtient pour un très large intervalle de moyennes une corrélation très significative; mais le nombre de points est insuffisant pour qu' apparaisse la concavité de la loi. On serait amené à ajuster chacun des 8 nuages à une droite, de pente variant dans cet exemple entre 1,3 et 1,8 (justifiant des transformations comprises entre racine cubique et racine douzième). La caractère fortuit d'une loi de Taylor particulière, déterminée à partir d'un petit nombre de points, apparaît ici avec évidence.

CORRÉLATION MOYENNE-VARIANCE DANS DES CONDITIONS MOINS HOMOGÈNES D'ÉCHANTILLONNAGE

Si l'on partage maintenant la série en 4 groupes de 8 récoltes consécutives, on constate (Fig. 7) que les variances sont, dans leur ensemble, plus élevées à moyenne égale que dans le premier traitement. Les petits effectifs ne sont, ici encore, pas éloignés de satisfaire à la loi de Poisson, mais la partie droite du nuage se trouve déplacée vers le haut. Cela revient à constater que la liaison moyenne-variance s'est déplacée, dans notre famille de lois $\log^p$, vers les p inférieurs. L'alignement du nouveau

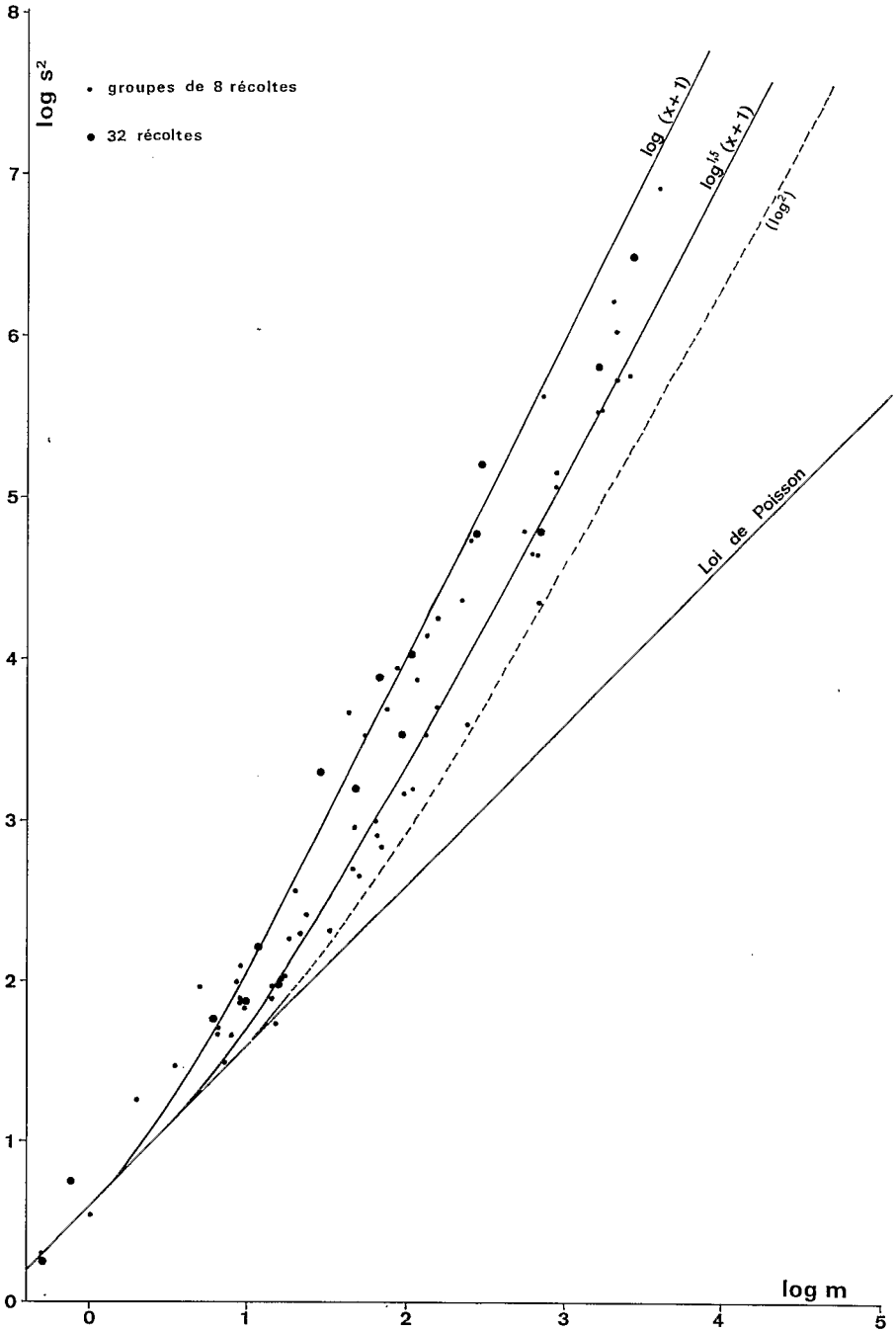

Fig. 7. Points (moyenne, variance) pour la série de 32 récoltes station 10. Paramètres calculés par groupes de 8 récoltes consécutives (petits points) et sur l'ensemble des 32 récoltes (gros points), sur les effectifs non transformés.

nuage suggère une loi $\log^{1,2}$ ou $\log^{1,3}$ – que nous n'avons pas précisé en raison du petit nombre de points observés.

Pour un taxon particulier la corrélation moyenne-variance apparaît, cette fois, nettement, et l'on constate que l'alignement des 4 points observés s'identifie localement à l'alignement général. Il apparaît donc indifférent, pour établir la liaison moyenne-variance, de faire varier les deux paramètres en faisant varier les espèces ou les conditions de récolte; seul paraît déterminant l'ordre de grandeur des effectifs dénombrés dans un échantillon.

Enfin, si l'on calcule moyenne et variance sur l'ensemble des 32 récoltes, ne faisant plus varier que la catégorie zoologique, on obtient un nuage de 16 points qui ne semble pas loin de s'ajuster à la loi log-normale (Fig. 7: gros points).

Étude d'une Série de 64 Récoltes sur un Quadrillage de 16 Stations

Un quadrillage (opération 'Carré magique', le 7 juillet 1970, baie d'Ambaro) comprend 16 stations disposées en 4 carrée de 1 mille de côté, eux-mêmes situés aux sommets d'un carré de 7 milles sur 7 (Fig. 8a). En chaque station sont réalisées 4 récoltes successives, par trait oblique fond-surface d'un filet muni d'un débimètre. L'opération complète a duré 10 h 35 min (07.15 à 17.50); chaque série de 4 récoltes en un même point demandait 10 à 20 min. Les comptages ont été effectués sur 3/20 aliquotes de chaque récolte (fractionnement à la poire) et ont porté sur les 11 taxons suivants:

Copépodes
Lucifer spp. protozoés
Lucifer spp. mysis
Lucifer spp. stades postlarvaires
Evadne tergestina Claus
Penilia avirostris Dana
Sagitta enflata Grassi
Chaetognathes: autres espèces
Creseis acicula Rang
Creseis chierchiae Boas
Oeufs d'Anchois

Les effectifs sont ramenés avant tout calcul à 10 m^3 d'eau filtrée (volume de l'ordre de grandeur des volumes réellement filtrés dans une récolte).

On remarque que les conditions d'échantillonnage sont diversifiées par rapport à la première expérience: l'homogénéité d'une série de 4 récoltes successives est meilleure, s'étendant sur une durée plus courte; d'autre part le volume filtré est mieux contrôlé; les stations d'un même carré de 1 mille montrent généralement des différences significatives en ce qui concerne l'abondance des taxons; le carré de 7 milles chevauche un gradient écologique côte-large.

Corrélation moyenne-variance en une station

Les points (m, s^2) calculés en chaque station à partir des 4 récoltes consécutives, pour chaque catégorie zoologique, constituent un nuage dont l'allure (Fig. 8b)

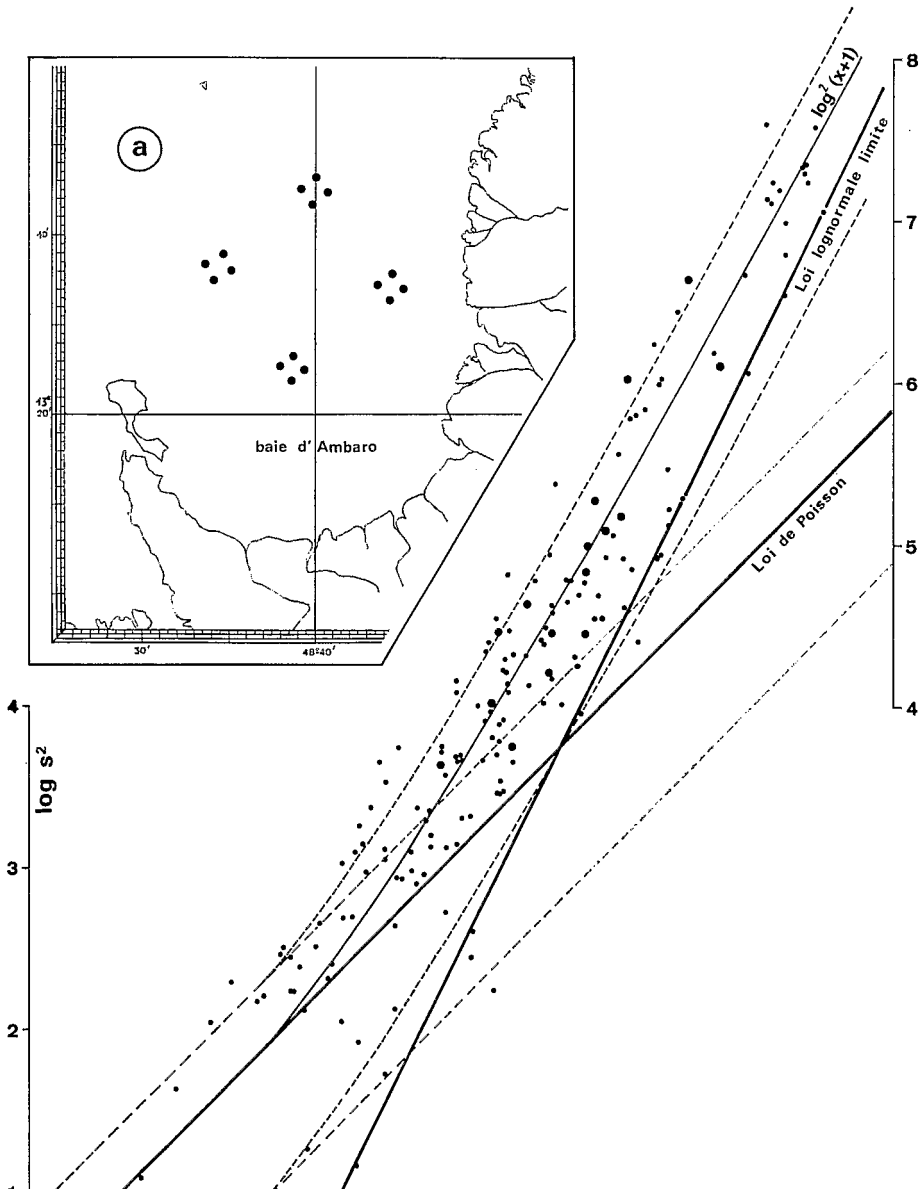

Fig. 8. Série de 64 récoltes en 16 stations; a, carte des stations; b, points (moyenne, variance) par groupes de 4 récoltes en une même station. Effectifs non transformés.

rappelle beaucoup le résultat de la première expérience. Toutefois, en raison sans doute de la meilleure homogénéité de chaque échantillonnage, les variances sont, à moyenne égale, plus faibles. Si l'on admet que la loi de Poisson se réalise encore pour les petits effectifs (rares dans cette série de comptages), le nuage doit alors être axé sur la courbe correspondant à la loi 'log²'; on constate effectivement que la transformation $\log^2 (x+1)$ stabilise la variance (coefficient de corrélation entre moyenne et variance $r = -0{,}692$ après transformation log, et $-0{,}116$ après transformation $\log^2$). Les limites à 5 % calculées par rapport à la loi 'log²' laissent 19 % des points en dehors du domaine de confiance, et le test de Bartlett aboutit à, $\chi^2_{175} = 310{,}08$ alors que la valeur maximale admissible à 1 % est 222,61. On rejoint donc les conclusions de l'expérience précédente. La normalité de la distribution des résidus est approximativement réalisée après transformation $\log^2$, du moins dans la partie centrale, à une légère curtosis près de même sens que précédemment (Fig. 9). La

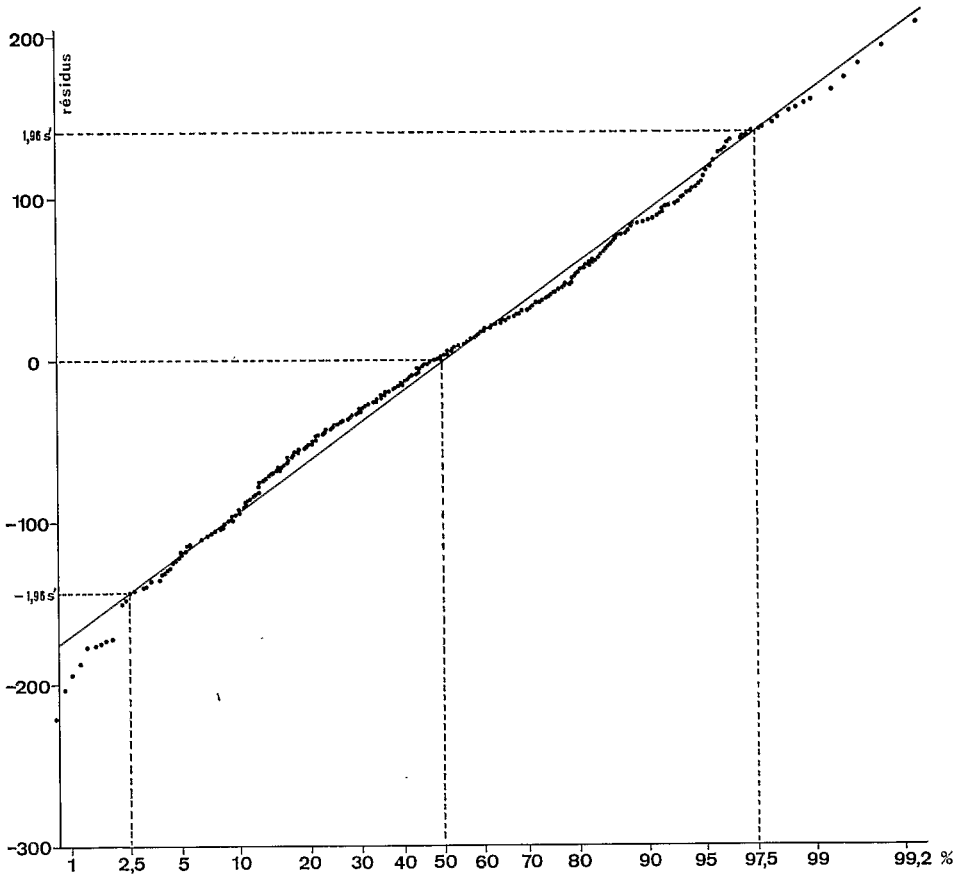

Fig. 9. Série de 64 récoltes en 16 stations, groupes de 4 récoltes en une même station. Distribution des fréquences cumulées des résidus après transformation $\log^2$ (fréquences en échelle probit).

variance estimée graphiquement (intervalle central comprenant 95 % des points) est de 0,7026.

La restriction du nuage aux points correspondant à une station ou à une catégorie zoologique appelle les mêmes remarques que précédemment. Cependant, les espèces montrant des variations notables d'abondance moyenne d'une station à l'autre, l'alignement des points-espèces est plus facilement observé; il coïncide avec l'alignement général pour l'intervalle de moyennes concerné (exemple sur la Fig. 8b: points se rapportant aux protozoés de *Lucifer*).

CORRÉLATION MOYENNE-VARIANCE SUR UN CARRÉ DE 1 MILLE ET SUR LE CARRÉ DE 7 MILLES

En calculant moyenne et variance sur des groupes de 4 récoltes choisies aux 4 stations différentes d'un carré de 1 mille, on obtient un nouveau nuage de 176 points situé au dessus du précédent, c'est à dire s'axant sur une courbe du faisceau comprise entre les courbes '$\log^{3/2}$' et 'log'.

Un troisième nuage s'obtient en calculant les paramètres sur des groupes de 4 récoltes choisies en 4 stations différentes du carré de 7 milles. Ce nuage se situe encore légèrement au dessus du précédent. La Fig. 10 ne représente, pour plus de clarté, qu'une partie des points obtenus.

L'hétérogénéité croissante des conditions d'échantillonnage n'est pas obtenue ici de la même façon que dans l'expérience précédente, où nous avions groupé les récoltes par ensembles d'importance croissante. La résultat est cependant le même: en augmentant l'hétérogénéité des conditions d'échantillonnage ont fait tendre les distributions vers la log-normalité.

ÉTUDE D'UNE SÉRIE DE 10 RÉCOLTES EN UN MÊME POINT

Le 2 janvier 1969, Station AMB 29, en baie d'Ambaro. 10 traits obliques fond-surface ont été réalisés en une heure trente minutes. Les volumes filtrés sont mal connus, mais compris entre 5,3 et 6,0 m^3. Les effectifs sont traités sans avoir été ramenés à un volume fixe. Les 18 catégories zoologiques suivantes ont été dénombrées sans fractionnement des récoltes:

Lucifer hanseni Nobili protozoés 1 et 2
Lucifer hanseni protozoés 3
Lucifer hanseni mysis 1
Lucifer hanseni mysis 2
Lucifer hanseni postlarves immatures
Lucifer hanseni males adultes
Lucifer hanseni femelles adultes
Lucifer autres espèces
Evadne tergestina Claus
Penilia avirostris Dana
Hyperia spp.
Zoés de Décapodes Brachyoures
Sagitta enflata Grassi
Chaetognathes autres espèces
Creseis acicula Rang
Calycophores
Cténaires
Dolioles

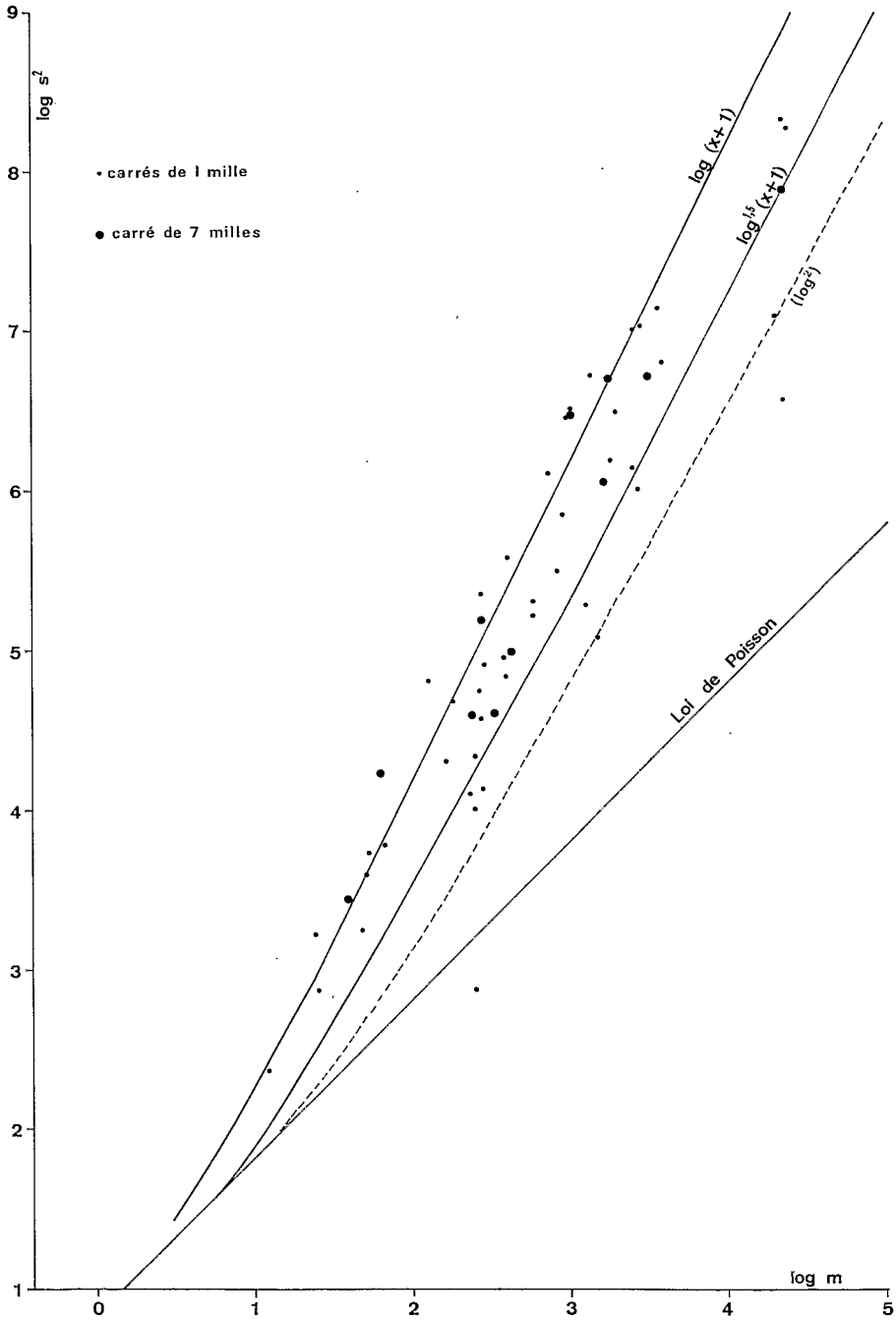

Fig. 10. Points (moyenne, variance) pour la série de 64 récoltes en 16 stations. Paramètres calculés par groupes de 4 récoltes choisies aux 4 sommets d'un carré de 1 mille (petits points), et par groupes de 4 récoltes choisies aux 4 sommets du carré de 7 milles (gros points), sur les effectifs non transformés.

Le graphique (m, s^2) pour les effectifs non transformés est reproduit à la Fig. 11. Chaque point se rapporte à une catégorie zoologique et aux 10 récoltes. Trois points se trouvent au voisinage de la loi de Poisson; 13 autres sont assez régulièrement répartis suivant un nuage rectiligne de pente voisine de 1,4; les deux derniers points sont situés très haut. Les transformations $\log^2$ (Fig. 12a) et racine cubique fournissent une stabilisation très satisfaisante pour le groupe central de 13 points; cependant si l'on considère les 18 points, le graphique indique une corrélation moyenne-variance positive. A l'inverse la transformation logarithmique simple (Fig. 12b) aboutit

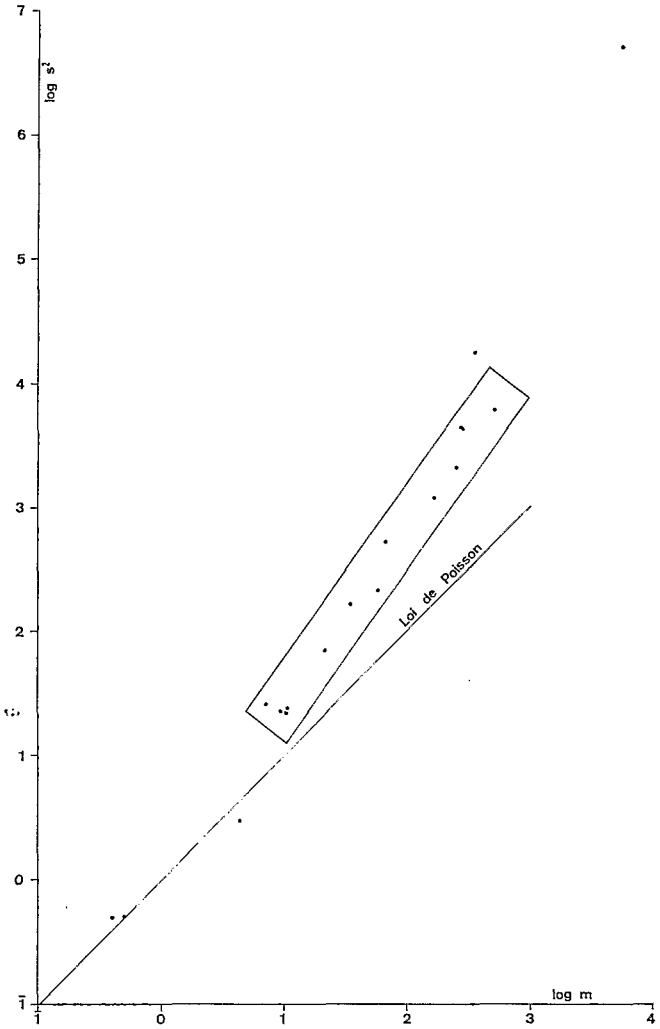

Fig. 11. Points (moyenne, variance) pour la série de 10 récolte station AMB 29. Effectifs non transformés.

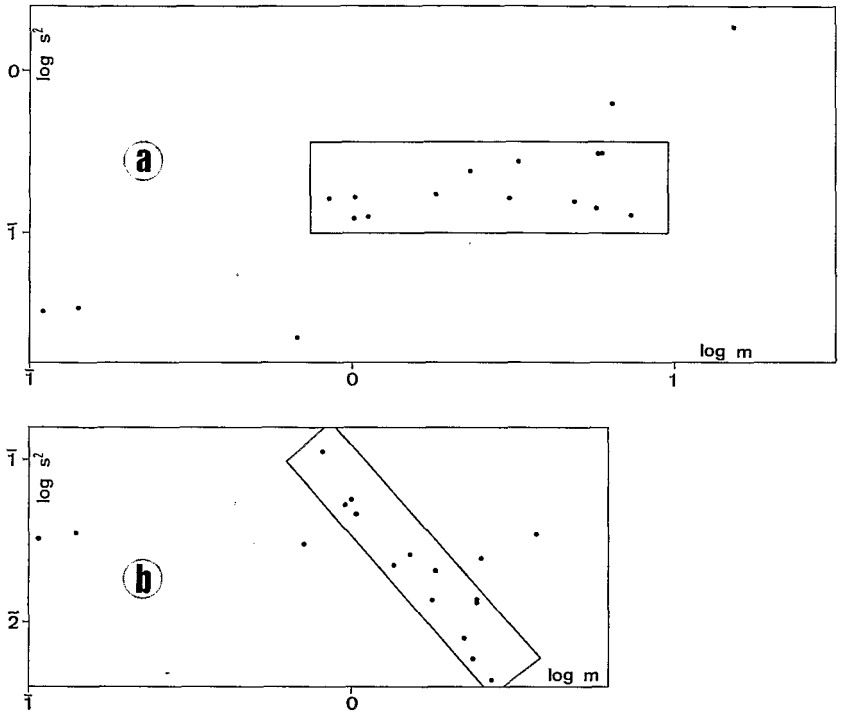

Fig. 12. Points (moyenne, variance) pour la série de 10 récoltes station AMB 29, après transformations: a, $\log^2$; b, log sur les effectifs.

à une indépendance des deux paramètres si l'on considère l'ensemble des 18 points, mais alors le groupe central montre une forte corrélation négative.

Il serait imprudent de conclure. On peut toutefois penser que le peuplement planctonique d'un volume d'eau est constitué de populations de caractères statistiques variés, mais dont la superposition peut donner lieu à une loi globale souvent vérifiée. Cependant, dans un échantillonnage réduit tel que celui de notre troisième exemple, certaines espèces peuvent montrer une dispersion de caractères statistiques distincts; si l'on veut inclure ces espèces dans la définition d'une loi d'ensemble, alors la transformation logarithmique s'impose, mais dans ces conditions les hypothèses de l'analyse de la variance sont moins bien réalisées pour le groupe 'homogène' central qu'avec une transformation adaptée à ce groupe. On pourrait voir là une façon supplémentaire de faire tendre les distributions vers une log-normalité globale en augmentant 'l'hétérogénéite' des données. Un récent travail d'Ibanez (Ibanez, 1971; aussi Frontier, 1971) aboutit d'ailleurs à la même conclusion.

Recherche d'une Solution Analytique: loi 'Poisson-Log-Normale' de Cassie

Voulant rendre compte de distributions intermédiaires entre une distribution de

Poisson et une distribution log-normale, Cassie (1962) propose l'hypothèse suivante: la loi log-normale n'est vérifiée qu'à grande échelle; en un point, les effectifs par récolte suivent une loi de Poisson; le paramètre de cette dernière est, dans un domaine spatio-temporel plus vaste, distribué de façon log-normale. Ce schéma semble rejoindre les considérations évoquées ci-dessus. L'auteur donne une approximation 'point par point' d'une loi de ce type, qu'il nomme 'Poisson-log-normale', mais n'en donne pas de forme analytique; cette dernière est sans doute complexe. Il est toutefois possible de déterminer, partant de ces hypothèses, la relation moyenne-variance devant être réalisée.

On sait (voir par exemple Kendall & Stuart, Vol. 1, p. 119) que si une variable aléatoire Y possède une distribution de Poisson de paramètre X, X étant lui-même une variable aléatoire de fonction caractéristique $\phi_x(t)$, alors la fonction caractéristique de la distribution inconditionnelle de Y est

$$\phi_y(t) = \phi_x\left(\frac{e^{it}-1}{i}\right)$$

Si donc ϕ_x est donné sous la forme d'un développement limité

$$\phi_x(t) = 1+\sum_{k=1}^{\infty} m_k \cdot \frac{(it)^k}{k!},$$

où m_k est le moment d'ordre k de X, alors

$$\begin{aligned}\phi_y(t) &= 1+\sum_{k=1}^{\infty} m_k \cdot \frac{i^k}{k!}\left(\frac{e^{it}-1}{i}\right)^k \\ &= 1+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_k}{k!}\cdot(e^{it}-1)^k\end{aligned}$$

soit, en utilisant le développement limité

$$e^{it}-1 = it+i^2t^2/2+\ldots+i^kt^k/k!+\ldots.$$

$$\begin{aligned}\phi_y(t) = 1&+m_1\left(it+\frac{i^2t^2}{2}+\ldots+\frac{i^kt^k}{k!}+\ldots\right)\\ &+m_2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(it+\frac{i^2t^2}{2}+\ldots+\frac{i^kt^k}{k!}+\ldots\right)^2\\ &\vdots\\ &+m_k\cdot\frac{1}{k!}\left(it+\frac{i^2t^2}{2}+\ldots+\frac{i^kt^k}{k!}+\ldots\right)^k\\ &\vdots\end{aligned}$$

En se limitant aux termes de degré inférieur ou égal à 2:

$$\phi_y(t) = 1+m_1\,it+(m_1+m_2)\frac{i^2t^2}{2}+\ldots$$

que l'on doit identifier avec,

$$\phi_y(t) = 1+M_1\,it+M_2\frac{i^2t^2}{2}+\ldots,$$

où M_1 et M_2 sont les deux premiers moments de la distribution inconditionnelle de Y. On en tire:

$$M_1 = m_1$$

$$M_2 = m_1+m_2$$

et la variance inconditionnelle de Y est

$$\sigma^2(Y) = M_2-M_1^2$$
$$= m_1+m_2-m_1^2$$

Ce résultat est valable quelle que soit la distribution de X, moyenne locale. Si cette dernière variable est log-normale, c'est à dire si $\log X$ est distribué normalement avec une moyenne μ et une variance V (logarithmes népériens), on sait qu'alors

$$m_k = \exp\left(k\mu+\frac{k^2V}{2}\right)$$

En particulier (*cf.* par exemple Dagnelie, 1969)

$$m_1 = \exp\left(\mu+\frac{V}{2}\right)$$

$$m_2 = \exp(2\mu+2V) = m_1^2e^V$$

d'où

$$\sigma^2(Y) = m_1+m_1^2(e^V-1) \# m_1+Vm_2$$

C'est la relation cherchée. On reconnaît la relation caractérisant une distribution binomiale négative de paramètre $K = 1/V$.

Reprenons les deux premiers exemples. Bien qu'il soit difficile d'évaluer très précisément la variance des logarithmes pour les plus grands effectifs, il paraît raisonnable de situer sa valeur aux environs de 0,0025 dans le premier cas (Fig. 5) et de 0,00025 dans le second les logarithmes étant de base 10. En logarithmes népériens ces variances sont égales à 0,01325 et 0,001325 respectivement, ce qui correspondrait à des valeurs de K égales à 75 et 750. Nous avons porté sur les Figs 4 et 8b les droites de pente 2 correspondant aux distributions log-normales limites dans les deux séries de récoltes (les équations de ces droites sont $\log\sigma^2 = 2\log\mu-1{,}88$ et

2 log $\mu - 2{,}88$ respectivement), et sur la Fig. 3 les courbes correspondant aux distributions binomiales négatives pour $k = 75$ et 750 (courbes en pointillé). Ces dernières ne coïncident avec aucune des courbes caractéristiques des lois '$\log^p$': elles restent collées à la première diagonale beaucoup plus longtemps que ne le suggèrent les observations ayant conduit à effectuer les transformations $\log^{3/2}$ et $\log^2$; le choix arbitraire (ne correspondant plus au modèle Poisson-log-normal) d'une valeur de k plus petite (Fig. 3: $k = 10$) donne une branche supérieure plus conforme aux résultats expérimentaux, mais reste éloignée de la loi de Poisson pour les plus petits effectifs. Rappelons que Cassie (1962) signalait la valeur médiocre de la loi binomiale négative en tant que modèle de distributions d'effectifs planctoniques.

CONCLUSIONS

L'hypothèse séduisante Poisson-log-normale ne paraît donc pas devoir être retenue, du moins pour rendre compte des données présentées ici. La réalité est sans doute plus complexe. Les distributions en un point ne sont peut-être pas des distributions de Poisson (sauf pour les petits effectifs); d'autre part la limite supérieure n'est peut-être pas la loi log-normale (ceci est rendu vraisemblable par l'observation, dans certaines circonstances, de lois de Taylor de pente supérieure à 2, que ne prévoient ni la loi binomiale négative ni la loi '$\log^p$'). Enfin, la composition de deux distributions seulement n'est peut-être pas suffisante. Le problème serait à reprendre en partant d'autres hypothèses. Ce travail n'a pas été entrepris, toutefois quelques directions de recherche semblent pouvoir être proposées.

L'existence de familles de distributions réalisant un passage progressif de la loi de Poisson à la loi log-normale (ou à une autre loi plus complexe) traduit sans doute uniquement l'effet de l'échantillonnage: cet effet se produirait quand bien même l'échantillonnage serait techniquement parfait, et même remplacé par des considérations théoriques introduisant un ordre de grandeur du volume d'eau dans lequel on recherche une distribution de fréquences, empirique ou théorique, des abondances d'organismes. La dispersion des organismes dans la phase aqueuse possède des caractères statistiques pour autant que l'on envisage d'y réaliser un échantillonnage; elle peut se décrire alors par une famille de distributions, une distribution particulière étant fixée par la valeur du volume d'eau filtré. Il y a autant de distributions, pour une même dispersion, que de valeurs de ce volume: si les organismes sont dispersés au hasard, la description statistique de la dispersion sera donnée par une infinité de distributions de Poisson, la paramètre de chacune d'elles étant déterminé par la taille des échantillons. S'il existe une surdispersion, elle concerne une certaine échelle d'observation; à cette échelle des échantillons trop petits risquent de fournir néanmoins des distributions de Poisson.

A supposer que l'on décrive des familles de distributions par des lois empiriques de type '$\log^p$', la variation de l'exposant p suivant les circonstances apparaît elle aussi comme une variation des lois statistiques en fonction de l'échelle d'observation. On a vu que p tend vers 1 lorsqu'on augmente 'l'hétérogénéité' des conditions

d'échantillonnage – c'est à dire, concrètement, lorsqu'on augmente le nombre de causes de variation et leur intensité en échantillonnant à l'intérieur d'un domaine spatio-temporel plus vaste. A un niveau donné d'observation la variabilité 'résiduelle', c'est à dire obtenue dans un intervalle d'espace et de temps négligeable par rapport à l'échelle des phénomènes étudiés, intègre l'effet des phénomènes agissant à une échelle inférieure. Il est alors clair qu'à moyenne fixe, la variabilité 'residuelle' sera fonction de l'échelle à laquelle elle est définie.

Une des conclusions les plus paradoxales de l'étude empirique présentée ci-dessus est l'absence de singularité des lois statistiques suivies par une catégorie zoologique particulière, par rapport à la loi statistique d'ensemble. Les biologies et micro-répartitions très variables suivant les espèces laisseraient plutôt supposer que les caractères statistiques de dispersion dépendent des espèces, et des conditions biologiques locales. Nous rejoignons à ce sujet les conclusions d'un récent travail de Wiebe (1970). Tout se passe comme si, du point de vue de la liaison moyenne-variance, les catégories ne différaient entre elles que par l'ordre de grandeur des effectifs réels par échantillon. Arguant de cette indépendance vis à vis de la biologie, Wiebe suggère que ces lois ont une origine physique. Il est remarquable que la variation des lois de distribution en fonction de l'échelle d'observation est précisément la situation rencontrée dans l'étude de la turbulence hydrodynamique, à laquelle est très certainement lié le phénomène de dispersion des organismes planctoniques (Platt, 1972). C'est peut-être en partant de telles considérations que l'on parviendra à construire un modèle théorique explicatif, conforme aux situations observées. Dans l'état actuel l'approche empirique semble toutefois la seule praticable.

Annexe

Tables des valeurs approximatives de $\log_{10}^{1,5}(n+1)$ et $\log_{10}^{2}(n+1)$

Chacune des tables se compose de quatre parties:

1) De $n = 0$ à 199 ($\log^{1,5}$) ou de 0 à 399 ($\log^{2}$): tableaux à double entrée (dizaines en abscisses, unités en ordonnées).

2) De $n = 200$ ($\log^{1,5}$) ou de 400 ($\log^{2}$) à 10.000, lire: à partir de $n = x$ (colonne de gauche), $\log^{p}(n+1) = y$ (colonne de droite). Exemples: à partir de $n = 554$ (et jusque $n = 558$ inclusivement), $\log^{1,5} = 455$; à partir de $n = 559$ (et jusque $n = 564$ inclusivement, $\log^{1,5} = 4{,}56$.

3) De $n = 10.000$ à 100.000: tableau à double entrée donnant les valeurs de 1.000 en 1.000 (dizaine de milles en abscisses, milliers en ordonnées).

4) De $n = 100.000$ à 1.000.000: tableau à double entrée donnant les valeurs de 10.000 en 10.000 (centaines de milles en abscisses, dizaines de milles en ordonnées).

Possibilité d'interpolation linéaire pour les tableaux 3 et 4.

Note = pour $n < 4$ ($\log^{1,5}$) ou $n < 10$ ($\log^{2}$) la fonction $\log^{p}$ est remplacée par une fonction proportionnelle à $\sqrt{n}$. cf. texte.

TABLEAU I (0 à 199)
Transformation 'log ^{1,5}'.

n	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
0	0,00	1,06	1,52	1,82	2,05	2,23	2,39	2,52	2,64	2,74	2,84	2,93	3,01	3,08	3,15	3,22	3,28	3,34	3,39	3,45
1	0,29	1,12	1,56	1,85	2,07	2,25	2,40	2,53	2,65	2,75	2,85	2,93	3,01	3,09	3,16	3,22	3,28	3,34	3,40	3,45
2	0,41	1,18	1,59	1,87	2,09	2,26	2,41	2,54	2,66	2,76	2,86	2,94	3,02	3,10	3,16	3,23	3,29	3,35	3,40	3,46
3	0,50	1,23	1,62	1,90	2,11	2,28	2,43	2,55	2,67	2,77	2,87	2,95	3,03	3,10	3,17	3,24	3,30	3,35	3,41	3,46
4	0,58	1,28	1,65	1,92	2,13	2,30	2,44	2,57	2,68	2,78	2,88	2,95	3,04	3,11	3,18	3,24	3,30	3,36	3,41	3,47
5	0,69	1,32	1,68	1,94	2,14	2,31	2,45	2,58	2,69	2,79	2,88	2,96	3,04	3,12	3,18	3,25	3,31	3,36	3,42	3,47
6	0,78	1,37	1,71	1,96	2,16	2,33	2,47	2,59	2,70	2,80	2,89	2,97	3,05	3,12	3,19	3,25	3,31	3,37	3,42	3,48
7	0,86	1,41	1,74	1,99	2,18	2,34	2,48	2,60	2,71	2,81	2,90	2,98	3,06	3,13	3,20	3,26	3,32	3,38	3,43	3,48
8	0,93	1,45	1,77	2,01	2,20	2,36	2,49	2,61	2,72	2,82	2,91	2,99	3,07	3,14	3,20	3,27	3,33	3,38	3,44	3,49
9	1,00	1,48	1,80	2,03	2,21	2,37	2,51	2,62	2,73	2,83	2,92	3,00	3,07	3,14	3,21	3,27	3,33	3,39	3,44	3,49

TABLEAU II (200 à 10 000)

Transformation 'log^{1,5}'.

201	3,50	293	3,88	423	4,26	602	4,64	852	5,02	1191	5,40	1656	5,78	2283	6,16	3135	6,54	4268	6,92	5777	7,30	7783	7,68
203	3,51	295	3,89	427	4,27	608	4,65	859	5,03	1202	5,41	1670	5,79	2302	6,17	3162	6,55	4302	6,93	5822	7,31	7843	7,69
205	3,52	298	3,90	431	4,28	613	4,66	867	5,04	1213	5,42	1684	5,80	2321	6,18	3188	6,56	4336	6,94	5868	7,32	7903	7,70
207	3,53	301	3,91	435	4,29	619	4,67	874	5,05	1223	5,43	1698	5,81	2341	6,19	3215	6,57	4370	6,95	5913	7,33	7063	7,71
209	3,54	304	3,92	439	4,30	625	4,68	882	5,06	1234	5,44	1713	5,82	2360	6,20	3242	6,58	4404	6,96	5959	7,34	8026	7,72
211	3,55	307	3,93	443	4,31	631	4,39	890	5,07	1245	5,45	1728	5,83	2380	6,21	3268	6,59	4438	6,97	6004	7,35	8002	7,73
213	3,56	310	3,94	447	4,32	636	4,70	897	5,08	1256	5,46	1743	5,84	2399	6,22	3295	6,60	4472	6,98	6054	7,36	8157	7,74
215	3,57	313	3,95	453	4,33	642	4,71	905	5,09	1267	5,47	1758	5,85	2420	6,23	3321	6,61	4507	6,99	6103	7,37	8223	7,75
217	3,58	316	3,96	455	4,34	648	4,72	914	5,10	1278	5,48	1773	5,86	2440	6,24	3348	6,62	4545	7,00	6153	7,38	8289	7,76
219	3,59	319	3,97	460	4,35	654	4,73	922	5,11	1289	5,49	1788	5,87	2461	6,25	3374	6,63	4583	7,01	6202	7,39	8355	7,77
222	3,60	323	3,98	464	4,36	660	4,74	931	5,12	1300	5,50	1803	5,88	2481	6,26	3401	6,64	4622	7,02	6252	7,40	8421	7,78
224	3,61	326	3,99	469	4,37	666	4,75	939	5,13	1311	5,51	1818	5,89	2502	6,27	3428	6,65	4660	7,03	6301	7,41	8486	7,79
226	3,62	329	4,00	474	4,38	672	4,76	948	5,14	1323	5,52	1834	5,90	2523	6,28	3454	6,66	4698	7,04	6351	7,42	8552	7,80
229	3,63	332	4,01	478	4,39	679	4,77	956	5,15	1335	5,53	1849	5,91	2545	6,29	3481	6,67	4736	7,05	6400	7,43	8618	7,81
231	3,64	336	4,02	483	4,40	685	4,78	965	5,16	1347	5,54	1865	5,92	2567	6,30	3509	6,68	4774	7,06	6450	7,44	8684	7,82
233	3,65	339	4,03	487	4,41	691	4,79	973	5,17	1358	5,55	1881	5,93	2589	6,31	3538	6,69	4812	7,07	6499	7,45	8749	7,83
236	3,66	342	4,04	492	4,42	697	4,80	982	5,18	1370	5,56	1896	5,94	2610	6,32	3569	6,70	4851	7,08	6552	7,46	8815	7,84
238	3,67	345	4,05	496	4,43	703	4,81	990	5,19	1382	5,57	1913	5,95	2632	6,33	3600	6,71	4889	7,09	6605	7,47	8881	7,85
240	3,68	349	4,06	500	4,44	710	4,82	999	5,20	1394	5,58	1929	5,96	2654	6,34	3631	6,72	4927	7,10	6657	7,48	8947	7,86
243	3,69	352	4,07	505	4,45	717	4,83	1008	5,21	1406	5,59	1945	5,97	2676	6,35	3661	6,73	4965	7,11	6710	7,49	9016	7,87
245	3,70	356	4,08	509	4,46	723	4,84	1017	5,22	1418	5,60	1962	5,98	2697	6,36	3692	6,74	5004	7,12	6763	7,50	9087	7,88
248	3,71	359	4,09	514	4,47	730	4,85	1026	5,23	1431	5,61	1978	5,99	2719	6,37	3722	6,75	5045	7,13	6815	7,51	9160	7,89
250	3,72	363	4,10	519	4,48	736	4,86	1036	5,24	1443	5,62	1995	6,00	2742	6,38	3753	6,76	5087	7,14	6868	7,52	9233	7,90
252	3,73	366	4,11	524	4,49	743	4,87	1045	5,25	1456	5,63	2012	6,01	2766	6,39	3783	6.77	5129	7,15	6921	7,53	9306	7,91
255	3,74	370	4,12	529	4,50	750	4,88	1054	5,26	1468	5,64	2029	6,02	2790	6,40	3814	6,78	5170	7,16	6973	7,54	9379	7,92
257	3,75	373	4,13	533	4,51	757	4,89	1063	5,27	1481	5,65	2047	6,03	2813	6,41	3844	6,79	5212	7,17	7028	7,55	9452	7,93
260	3,76	377	4,14	538	4,52	764	4,90	1073	5,28	1493	5,66	2064	6,04	2837	6,42	3874	6,80	5254	7,18	7085	7,56	9525	7,94
263	3,77	381	4,15	543	4,53	771	4,91	1082	5,29	1506	5,67	2082	6,05	2860	6,43	3905	6,81	5295	7,19	7142	7,57	9598	7,95
265	3,78	384	4,16	548	4,54	778	4,92	1091	5,30	1519	5,68	2099	6,06	2884	6,44	3935	6,82	5337	7,20	7198	7,58	9671	7,96
268	3,79	388	4,17	554	4,55	785	4,93	1101	5,31	1533	5,69	2117	6,07	2908	6,45	3966	6,83	5379	7,21	7255	7,59	9744	7,97
271	3,80	391	4,18	559	4,56	792	4,94	1111	5,32	1546	5,70	2135	6,08	2931	6,46	3996	6,84	5420	7,22	7312	7,60	9817	7,98
273	3,81	395	4,19	565	4,57	799	4,95	1121	5,33	1559	5,71	2153	6,09	2955	6,47	4030	6,85	5462	7,23	7369	7,61	9800	7,90
278	3,82	398	4,20	570	4,58	806	4,96	1131	5,34	1573	5,72	2171	6,10	2978	6,48	4064	6,86	5504	7,24	7426	7,62	9963	8,00
279	3,83	403	4,21	575	4,59	814	4,97	1141	5,35	1586	5,73	2189	6,11	3002	6,49	4098	6,87	5549	7,25	7482	7,63		
281	3,84	407	4,22	580	4,60	821	4,98	1151	5,36	1600	5,74	2207	6,12	3029	6,50	4132	6,88	5595	7,26	7542	7,64		
284	3,85	411	4,23	585	4,61	829	4,99	1161	5,37	1614	5,75	2226	6,13	3055	6,51	4166	6,89	5640	7,27	7602	7,65		
287	3,86	415	4,24	590	4,62	837	5,00	1171	5,38	1628	5,76	2245	6,14	3082	6,52	4200	6,90	5686	7,28	7662	7,66		
290	3,87	419	4,25	596	4,63	844	5,01	1181	5,39	1642	5,77	2264	6,15	3109	6,53	4234	6,91	5732	7,29	7722	7,67		

TABLEAU III (10 000 à 99 000, de 1000 en 1000)
Transformation 'log^{1,5}'

$n\,10^{-3}$	10	20	30	40	50	60	70	80	90
0	8,00	8,92	9,47	9,87	10,19	10,45	10,66	10,86	11,03
1	8,12	8,99	9,51	9,90	10,21	10,47	10,68	10,87	11,04
2	8,24	9,05	9,55	9,94	10,24	10,49	10,70	10,89	11,06
3	8,34	9,11	9,50	9,97	10,26	10,51	10,72	10,91	11,07
4	8,44	9,17	9,63	10,00	10,29	10,53	10,74	10,93	11,09
5	8,53	9,22	9,67	10,03	10,32	10,55	10,76	10,94	11,10
6	8,62	9,27	9,71	10,06	10,34	10,58	10,78	10,96	11,12
7	8,70	9,32	9,75	10,09	10,36	10,60	10,80	10,98	11,13
8	8,78	9,37	9,79	10,12	10,39	10,62	10,82	10,99	11,15
9	8,85	9,42	9,83	10,15	10,42	10,64	10,84	11,01	11,16

TABLEAU IV (100 000 à 990 000, de 10 000 en 10 000).

$n\,10^{-3}$	100	200	300	400	500	600	700	800	900
00	11,18	12,21	12,82	13,26	13,61	13,89	14,13	14,34	14,53
10	11,32	12,28	12,87	13,30	13,63	13,91	14,15	14,36	14,55
20	11,45	12,35	12,92	13,34	13,66	13,94	14,17	14,38	14,56
30	11,57	12,42	12,96	13,37	13,69	13,96	14,20	14,40	14,58
40	11,67	12,48	13,01	13,41	13,72	13,99	14,22	14,42	14,60
50	11,78	12,54	13,05	13,44	13,75	14,02	14,24	14,44	14,62
60	11,87	12,60	13,10	13,48	13,78	14,04	14,26	14,46	14,63
70	11,96	12,66	13,14	13,51	13,81	14,06	14,28	14,47	14,65
80	12,05	12,71	13,18	13,54	13,83	14,08	14.30	14,49	14,66
90	12,13	12,76	13,22	13,57	13,86	14,11	14,32	14,51	14,68

$10^6 \rightarrow 14{,}70$

TABLEAU V (0 à 399)

Transformation 'log²'.

n	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
0	0,00	1,08	1,75	2,22	2,60	2,92	3,19	3,43	3,64	3,84	4,02	4,18	4,34	4,48	4,62	4,75	4,87	4,99	5,10	5,20
1	0,33	1,16	1,80	2,27	2,63	2,94	3,21	3,45	3,66	3,86	4,03	4,20	4,35	4,50	4,63	4,76	4,88	5,00	5,11	5,21
2	0,47	1,24	1,85	2,31	2,67	2,97	3,24	3,47	3,68	3,87	4,05	4,22	4,37	4,51	4,65	4,77	4,89	5,01	5,12	5,22
3	0,58	1,31	1,90	2,35	2,70	3,00	3,26	3,49	3,70	3,89	4,07	4,23	4,38	4,52	4,66	4,79	4,91	5,02	5,13	5,23
4	0,67	1,38	1,95	2,38	2,73	3,03	3,29	3,52	3,72	3,91	4,09	4,25	4,40	4,54	4,67	4,80	4,92	5,03	5,14	5,24
5	0,75	1,45	2,00	2,42	2,76	3,06	3,31	3,54	3,74	3,93	4,10	4,26	4,42	4,55	4,68	4,81	4,93	5,04	5,15	5,25
6	0,82	1,51	2,05	2,46	2,80	3,08	3,33	3,56	3,76	3,95	4,12	4,28	4,43	4,57	4,70	4,82	4,94	5,05	5,16	5,26
7	0,88	1,58	2,09	2,50	2,83	3,11	3,36	3,58	3,78	3,96	4,13	4,29	4,44	4,58	4,71	4,83	4,95	5,06	5.17	5,27
8	0,94	1,64	2,14	2,53	2,86	3,14	3,38	3,60	3,80	3,98	4,15	4,31	4,45	4,59	4,72	4,85	4,96	5,08	5,18	5,28
9	1,00	1,69	2,18	2,57	2,89	3,16	3,40	3,62	3,82	4,00	4,17	4,32	4,47	4,61	4,74	4,86	4,97	5,09	5,19	5,29

n	200	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300	310	320	330	340	350	360	370	380	390
0	5,30	5,40	5,50	5,59	5,67	5,76	5,84	5,92	6,00	6,07	6,14	6,21	6,28	6,35	6,41	6,48	6,54	6,60	6,66	6,72
1	5,31	5,41	5,50	5,60	5,68	5,77	5,85	5,93	6,00	6,08	6,15	6,22	6,29	6,36	6,42	6,48	6,55	6,61	6,67	6,73
2	5,32	5,42	5,51	5,60	5,69	5,77	5,86	5,93	6,01	6,09	6,16	6,23	6,30	6,36	6,43	6,49	6,55	6,61	6,67	6,73
3	5,33	5,43	5,52	5,61	5,70	5,78	5,86	5,94	6,02	6,09	6,16	6,23	6,30	6,37	6,43	6,50	6,56	6,62	6,68	6,74
4	5,34	5,44	5,53	5,62	5,71	5,79	5,87	5,95	6,03	6,10	6,17	6,24	6,31	6,38	6,44	6,50	6,57	6,63	6,68	6,74
5	5,35	5,45	5,54	5,63	5,72	5,80	5,88	5,96	6,03	6,11	6,18	6,25	6,32	6,38	6,45	6,51	6,57	6,63	6,69	6,75
6	5,36	5,46	5,55	5,64	5,73	5,81	5,89	5,97	6,04	6,11	6,19	6,26	6,32	6,39	6,45	6,52	6,58	6,64	6,69	6,75
7	5,37	5,47	5,56	5,65	5,73	5,82	5,90	5,97	6,05	6,12	6,19	6,26	6,33	6,40	6,46	6,52	6,59	6,64	6,70	6,76
8	5,38	5,48	5,57	5,66	5,74	5,82	5,90	5,98	6,06	6,13	6,20	6,27	6,34	6,40	6,47	6,53	6.59	6,65	6.70	6,76
9	5,39	5,49	5,58	5,67	5,75	5,83	5,91	5,99	6,06	6,14	6,21	6,28	6,34	6,41	6,47	6,53	6,60	6,66	6,71	6,77

TABLEAU VI (400 à 10 000)

Transformation 'log²'.

400	6,78	466	7,13	542	7,48	627	7,83	723	8,18	831	8,53	953	8,88	1089	9,23	1242	9,58	1413	9,93	3691	12,8
402	6,79	468	7,14	544	7,49	629	7,84	726	8,19	834	8,54	956	8,89	1093	9,24	1247	9,59	1419	9,94	3812	12,9
404	6,80	470	7,15	546	7,50	632	7,85	728	8,20	837	8,55	960	8,90	1097	9,25	1251	9,60	1424	9,95	3936	13,0
406	6,81	473	7,16	548	7,51	634	7,86	731	8,21	840	8,56	964	8,91	1102	9,26	1256	9,61	1429	9,96	4064	13,1
407	6,82	475	7,17	551	7,52	637	7,87	734	8,22	844	8,57	967	8,92	1106	9,27	1261	9,62	1434	9,97	4196	13,2
409	6,83	477	7,18	553	7,53	640	7,88	737	8,23	847	8,58	972	8,93	1110	9,28	1265	9,63	1439	9,98	4331	13,3
411	6,84	479	7,19	555	7,54	642	7,89	740	8,24	851	8,59	975	8,94	1114	9,29	1270	9,64	1445	9,99	4470	13,4
413	6,85	481	7,20	558	7,55	645	7,90	743	8,25	854	8,60	979	8,95	1118	9,30	1275	9,65	1450	10,0	4613	13,5
415	6,86	483	7,21	560	7,56	647	7,91	746	8,26	857	8,61	982	8,96	1123	9,31	1280	9,66	1466	10,1	4760	13,6
416	6,87	485	7,22	562	7,57	650	7,92	749	8,27	861	8,62	986	8,97	1127	9,32	1284	9,67	1520	10,2	4911	13,7
418	6,88	487	7,23	565	7,58	653	7,93	752	8,28	864	8,63	990	8,98	1131	9,33	1289	9,68	1576	10,3	5066	13,8
420	6,89	489	7,24	567	7,59	656	7,94	755	8,29	868	8,64	994	8,99	1135	9,34	1294	9,69	1634	10,4	5226	13,9
422	6,90	491	7,25	570	7,60	658	7,95	758	8,30	870	8,65	998	9,00	1140	9,35	1299	9,70	1693	10,5	5390	14,0
424	6,91	493	7,26	572	7,61	661	7,96	761	8,31	874	8,66	1001	9,01	1144	9,36	1304	9,71	1754	10,6	5558	14,1
426	6,92	495	7,27	574	7,62	663	7,97	764	8,32	877	8,67	1005	9,02	1148	9,37	1308	9,72	1818	10,7	5732	14,2
428	6,93	497	7,28	577	7,63	666	7,98	767	8,33	881	8,68	1009	9,03	1153	9,38	1313	9,73	1883	10,8	5910	14,3
429	6,94	500	7,29	579	7,64	669	7,99	770	8,34	884	8,69	1013	9,04	1157	9,39	1318	9,74	1950	10,9	6093	14,4
431	6,95	502	7,30	582	7,65	672	8,00	774	8,35	888	8,70	1015	9,05	1161	9,40	1323	9,75	2019	11,0	6280	14,5
433	6,96	504	7,31	584	7,66	675	8,01	777	8,36	891	8,71	1021	9,06	1166	9,41	1328	9,76	2091	11,1	6473	14,6
435	6,97	506	7,32	586	7,67	677	8,02	780	8,37	895	8,72	1025	9,07	1170	9,42	1333	9,77	2164	11,2	6672	14,7
437	6,98	508	7,33	589	7,68	680	8,03	783	8,38	898	8,73	1029	9,08	1175	9,43	1338	9,78	2240	11,3	6875	14,8
439	6,99	510	7,34	591	7,69	683	8,04	786	8,39	902	8,74	1033	9,09	1180	9,44	1343	9,79	2318	11,4	7084	14,9
441	7,00	513	7,35	594	7,70	686	8,05	789	8,40	905	8,75	1037	9,10	1184	9,45	1348	9,80	2400	11,5	7299	15,0
443	7,01	515	7,36	596	7,71	688	8,06	792	8,41	909	8,76	1040	9,11	1188	9,46	1352	9,81	2482	11,6	7519	15,1
445	7,02	517	7,37	599	7,72	691	8,07	794	8,42	913	8,77	1044	9,12	1192	9,47	1357	9,82	2567	11,7	7746	15,2
447	7,03	519	7,38	602	7,73	694	8,08	799	8,43	916	8,78	1048	9,13	1197	9,48	1362	9,83	2655	11,8	7978	15,3
449	7,04	521	7,39	604	7,74	697	8,09	802	8,44	920	8,79	1052	9,14	1201	9,49	1367	9,84	2746	11,9	8217	15,4
451	7,05	524	7,40	606	7,75	700	8,10	806	8,45	923	8,80	1057	9,15	1206	9,50	1373	9,85	2839	12,0	8461	15,5
453	7,06	526	7,41	609	7,76	703	8,11	809	8,46	927	8,81	1061	9,16	1210	9,51	1378	9,86	2935	12,1	8713	15,6
454	7,07	528	7,42	611	7,77	705	8,12	813	8,47	930	8,82	1065	9,17	1215	9,52	1382	9,87	3034	12,2	8971	15,7
456	7,08	530	7,43	614	7,78	708	8,13	816	8,48	934	8,83	1069	9,18	1219	9,53	1388	9,88	3135	12,3	9235	15,8
458	7,09	532	7,44	616	7,79	711	8,14	819	8,49	938	8,84	1073	9,19	1224	9,54	1393	9,89	3241	12,4	9507	15,9
460	7,10	535	7,45	619	7,80	714	8,15	822	8,50	942	8,85	1077	9,20	1228	9,55	1398	9,90	3348	12,5	9786	16,0
462	7,11	537	7,46	621	7,81	717	8,16	825	8,51	945	8,86	1081	9,21	1233	9,56	1403	9,91	3459	12,6		
464	7,12	539	7,47	624	7,82	720	8,17	828	8,52	949	8,87	1085	9,22	1238	9,57	1408	9,92	3574	12,7		

TABLEAU VII (10 000 à 99 000, de 1000 en 1000)

Transformation 'log²'.

$n\ 10^{-3}$	10	20	30	40	50	60	70	80	90
0	16,0	18,5	20,0	21,2	22,1	22,8	23,5	24,0	24,5
1	16,3	18,7	20,2	21,3	22,2	22,9	23,5	24,1	24,6
2	16,6	18,9	20,3	21,4	22,2	23,0	23,6	24,1	24,6
3	16,9	19,0	20,4	21,5	22,3	23,0	23,7	24,2	24,7
4	17,2	19,2	20,5	21,6	22,4	23,1	23,7	24,2	24,7
5	17,4	19,3	20,6	21,7	22,5	23,2	23,8	24,3	24,8
6	17,7	19,5	20,8	21,7	22,5	23,2	23,8	24,3	24,8
7	17,9	19,6	20,9	21,8	22,6	23,3	23,9	24,4	24,9
8	18,1	19,8	21,0	21,9	22,7	23,4	23,9	24,4	24,9
9	18,3	19,9	21,1	22,0	22,8	23,4	24,0	24,5	25,0

TABLEAU VIII (100 000 à 990 000, de 10 000 en 10 000)

$n\ 10^{-3}$	100	200	300	400	500	600	700	800	900
00	25,0	28,1	30,0	31,4	32,5	33,4	34,2	34,8	35,5
10	25,4	28,3	30,2	31,5	32,6	33,5	34,2	34,9	35,5
20	25,8	28,5	30,3	31,6	32,7	33,6	34,3	35,0	35,6
30	26,2	28,7	30,5	31,7	32,8	33,6	34,4	35,0	35,6
40	26,5	28,9	30,6	31,8	32,9	33,7	34,5	35,1	35,7
50	26,8	29,1	30,7	32,0	33,0	33,8	34,6	35,2	35,7
60	27,1	29,3	30,9	32,1	33,0	33,9	34,6	35,2	35,8
70	27,4	29,5	31,0	32,2	33,1	33,9	34,7	35,3	35,8
80	27,6	29,7	31,1	32,3	33,2	34,0	34,7	35,3	35,9
90	27,9	29,8	31,3	32,4	33,3	34,1	34,8	35,4	35,9
									1 000 000 → 36,0

BIBLIOGRAPHIE

BARNES, H. & S. M. MARSHALL, 1951. On the variability of replicate plankton hauls and some applications of contagious series to the statistical distribution of catches over restricted periods. *J. mar. biol. Ass. U.K.*, Vol. 30, pp. 233–263.

BARTLETT, M. S., 1937. Properties of sufficiency and statistical tests. *Proc. R. Soc., A*, Vol. 160, pp. 268–282.

CASSIE, R. M., 1962. Frequency distribution models in the ecology of plankton and other organisms. *J. Anim. Ecol.*, Vol. 31, pp. 62–92.

CASSIE, R. M., 1963. Microdistribution of plankton. *Oceanogr. Mar. Biol. Ann. Rev.*, Vol. 1, pp. 223–252.

COMITA, G. W. & J. J. COMITA, 1957. The internal distribution patterns of Calanoids Copepods, and a description of a modified Clarks-Bumpus plankton sampler. *Limnol. Oceanogr.* Vol. 2, pp. 321–336.

DAGNELIE, P., 1969–1970. *Théorie et méthodes statistiques.* 2 Vols. J. Duculot, Gembloux, Belgique.

FISHER, R. A., 1954. Statistical methods for research workers. Oliver and Boyd, London, 356 pp.

FRONTIER, S., 1969. Sur une méthode d'analyse faunistique rapide du zooplancton. *J. exp. mar. Biol. Ecol.*, Vol. 3, pp. 18–26.

FRONTIER, S., 1971. Zooplancton d'une baie eutrophique tropicale. 5) Étude statistique de la microdispersion. *Doc. sci. Centre O.R.S.T.O.M. Nosy-Bé*, No. 24, pp. 55–95, 12 pl., multigr.

FRONTIER, S., 1972. Calcul de l'erreur sur un comptage de zooplancton. *J. exp. mar. Biol. Ecol.*, Vol. 8, pp. 121–132.

IBANEZ, F., 1971. Effet de la transformation des données dans l'analyse factorielle en écologie planctonique. *Cah. océanogr.*, T. 23, pp. 545–561.

KENDALL, M. G. & A. STUART, 1963–1968. *The advanced theory of statistics*, 3 Vols. Griffin, London.

MARGALEF, R., 1969. Estiodios sobre la distribución del fitoplancton marino. *Mem. real. Acad. Cienc. Artes Barcelona*, T. 40, pp. 3–22.

PLATT, T., 1972. Local phytoplankton abundance and turbulence. *Deep-Sea Res.*, Vol. 19, pp. 183–187.

TAYLOR, L. R., 1961. Aggregation, variance and the mean. *Nature Lond.*, Vol. 189, pp. 732–735.

WIEBE, P. H., 1970. Small scale spatial distributions in oceanic zooplankton. *Limnol. Oceanogr.*, Vol. 15, pp. 205–217.