LES OUTILS MATHEMATIQUES NOUVEAUX DU TRANSFERT D' ECHELLE.
GEOMETRIE FRACTALE, RELATEURS ARITHMETIQUES, THEORIE DES CATASTROPHES,DYNAMIQUE CHAOTIQUE, ANALYSE NON STANDARD

FRONTIER S.

1 - LES MATHEMATIQUES STANDARDS ET LE TRANSFERT D'ECHELLES.

Jusqu'à un passé récent, il semble que les seuls *transferts d'échelle* dont aient exactement rendu compte les mathématiques aient été le passage de l'"infiniment petit" à l'"infiniment grand". D'un système d'équations différentielles décrivant l'évolution "ponctuelle" et "instantanée" d'un objet, on déduit par intégration le comportement global de la totalité de l'objet jusqu'à la fin des temps. Ou d'une équation matricielle aux différences finies décrivant une transition pendant un pas de temps, on déduit le comportement vers un état soit stationnaire, soit perpétuellement oscillant[1].

Cette mathématique a longtemps fait merveille dans la prévision des systèmes de type "mécanique" - en fait, nous y reviendrons, pour celle de certains systèmes mécaniques seulement : les plus simples. Des que des simulations et des théories ont commencé à cibler des objets complexes (en fait, des *système*, c'est-à-dire des ensembles d'interactions entre objets distincts), force a été de constater que de nombreuses propriétés échappaient à la prévision mécaniste. Or ces propriétés étaient, malheureusement, les plus fondamentales au plan de la compréhension de ces objets et de leur maîtrise pratique.

---

[1] Des pratiques décrivant la variabilité à différentes échelles d'observation, classiques comme applications de la statistique; analyse de la variance , analyse des signaux) sont des descriptions purement phénoménologiques, On distribue empiriquement la variance (ou la puissance) en fonction des causes de variabilité, notamment de l'échelle d'observation quand la partition des cas possibles est hiérarchique, ou entre les longueurs d'onde au terme d'une analyse de Fourier, Ces descriptions ne disent rien sur la façon dont le déterminisme à un niveau devient le déterminisme a un autre niveau. Du reste les variances des différents niveaux sont, dans le principe-même du calcul, considérées comme indépendantes(orthogonales), ce qui élimine le problème du transfert de causalité entre échelles !

Les modèles mécanistes (ceux, répétons-le, représentés par des systèmes d'équations différentielles, d'équations aux dérivées partielles et d'équations aux différences finies) étalent, par essence, déterministes, c'est-à-dire que la connaissance d'un ensemble fini d'hypothèses de départ permettait de prévoir rigoureusement l'état de l'objet à n'importe quel instant ultérieur (et même antérieur dans le cas des phénomènes réversibles).

Cependant la première entorse à ce dogme est déjà ancienne, puisqu'il date des travaux de Poincaré au début de ce siècle : dans le *problème des trois corps*, l'auteur démontre que le comportement d'un système mécanique composé de plus de deux corps en interaction gravitationnelle n'est pratiquement prévisible que pour un laps de temps limité, définissant son "horizon temporel", et qu'au delà, d'infimes variations des conditions initiales font diverger exponentiellement les trajectoires dans l'espace de phase. Partant de deux états initiaux aussi proches qu'on peut l'affirmer, on trouvera des états finaux aussi éloignés que l'on veut. Puisque, dans la pratique, l'état initial d'un système mécanique n'est pas connaissable avec une précision infinie, cela revient à établir mathématiquement l'imprévisibilité, et l'indéterminisme à une échelle d'observation globale, d'un système mécanique quelconque...puisqu'un système réel comprend "en général~ plus de deux corps !

Ce principe a été appelé *sensibilité aux conditions initiales.* Il n'équivaut pas à un constat d'échec quant a la prévision des états macroscopiques car il a en même temps été démontré que pour une trajectoire s'éloignant indéfiniment d'un phénomène moyen, une autre, venant d'ailleurs, se rapproche du phénomène moyen, de sorte que celui-ci reste reconnaissable et prévisible à condition de ne pas s'en tenir aux détails.

Il reste à comprendre comprendre le microscopique aboutit à un macroscopique reconnaissable en dépit de la sensibilité aux conditions initiales. On a l'impression qu'une certaine autonomie est accordée à l'objet macroscopique vis-à-vis des fluctuations microscopiques, et ceci est typiquement un problème de *transfert d'échelles.* Jusqu'à un passe récent, la seule interprétation de ce phénomène était *statistique* c'est-à-dire faisait appel aux lois du hasard - expliquant par exemple pourquoi, à partir d'une dynamique très simple, mais répétée des milliards de fois, des chocs moléculaires, on obtenait macroscopiquement la loi de Marlotte [1].

---

[1] La loi de Mariotte est retrouvée sur ordinateur des qu'on simule 200 ou 300 molécules nombre infime par rapport a ceux qui interviennent dans la moindre vérification expérimentale, Les lois macroscopiques des gaz sur réseaux (voir communication de E. PERRIER, ce Colloque) apparaissent à partir de quelques dizaines de "molécules" simulées.

Le phénomène de *sensibilité aux conditions initiales* est depuis quelques années étudié de façon approfondie et la constatation de sa très grande généralité dans les systèmes réels se révèle d'une grande fécondité, puisqu'il a abouti à la récente *Théorie du chaos.*

Nous ne pouvons , dans cette note, d'exposer ces questions en détail et nous renvoyons le lecteur à quelques excellents ouvrages et articles récents, élémentaires tout en allant au delà de la vulgarisation car ils s'attachent à l'épistémologie et a la signification et philosophique profonde de cette nouvelle réflexion : EKELAND (1984), DE GENNES (1987), GLEICK (1987), CRUTCHFIELD *et al.* (1987), OTTINO (1989), pour nous en tenir à des textes en langue française.

La deuxième notion qui s'est imposée lorsqu'on a voulu modéliser des systèmes réels, est la *multiplicité des échelles signifiantes* dans l'appréhension d'un même phénomène.

Les mathématiciens ont été, sous cet aspect, largement précédés par les spécialistes des divers phénomènes (physiques, biologiques, sociaux...) qui de tout temps se sont attachés à décrire des phénoménologies à *différentes échelles d'espace, de temps et de complexité,* à voir dans toute structure une hiérarchie, et à rechercher des liens entre les phénomènes de différentes échelles. Malgré cela la modélisation des phénomènes a été ~et est toujours actuellement, à part quelques avancées très récentes, plus conceptuelles que pratiques) la modélisation d'une description à une échelle bien déterminée. Pour un phénomène complexe justiciable de plusieurs échelles d'observation - qui sont en même temps des échelles fonctionnelles, mais nous ne soulèverons pas ici cette question d'épistémologie - il y a autant de modélisation, et même de "théories" du phénomènes, que d'échelles de perception. On se s'aviserait pas d'extrapoler un modèle de productivité végétale valable sur un cycle de 24 heures, à une évolution séculaire : il s'agit de "phénomènes différents" bien qu'ils concernent les mêmes objets concrets (les végétaux), le même fonctionnement (la photosynthèse), et qu'ils soient simultanés (l'évolution séculaire étant la succession de dizaines milliers de jours successifs).

Les *transferts d'échelles* n'ont pas encore été modélisés.

Bien entendu les "phénoménologues" se penchent sur les inter-relations entre phénomènes d'échelles différentes : évolutions distinctes selon des pas de temps différents ; dynamiques variées dans la hiérarchie des complexités, comme dans les structures observées à différents niveaux d'organisation d'un objet vivant (de la cellule à l'écosystème ou à la société). L'*interaction entre phénomènes d'échelles distinctes* reste une des questions scientifiques les plus épineuses posées aux spécialistes de toutes les disciplines : on peut dire qu'elle est aujourd'hui l'un des problèmes scientifiques les plus fondamentaux, avec la Relativité et la Mécanique quantique. Elle féconde aujourd'hui la réflexion dans tous les domaines scientifiques.

Notre propos est de montrer que des développements récents en épistémologie et théorie et systèmes et le développement de certains outils mathématiques nouveaux semblent aujourd'hui donner un espoir de solution la modélisation des transferts d'échelle. Certes le problème n'est pas encore vraiment résolu, et la vision actuelle est encore très philosophique ; cependant on commence, semble-t-il, à t-on à savoir "où regarder" et "comment regarder".

2 - LE TRANSFERT D'ECHELLE DANS CERTAINS OUTILS MATHEMATIQUES NOUVEAUX

On trouve des références implicites ou explicites aux transferts d'échelles dans plusieurs domaines récents des mathématiques.

Tout d'abord, la *Théorie des catastrophes* (THOM), si elle ne se référé pas explicitement aux transferts d'échelle, donne un outil conceptuel où les phénoménologues reconnaîtront le "saut~ entre un déterminisme microscopique et un comportement global.

Puis la *Théorie des fractales* (MANDELBROT) et la théorie des *Relateurs arithmétiques* (MOULIN et Groupe SYSTEMA) formalisent des structures par niveaux, avec ou sans invariance d'échelle.

La *Dynamique chaotique*, qui introduit des *attracteurs étranges* ayant une dimension fractale, démontre l'existence d'un niveau macroscopique autonome, conséquence d'une itération poursuivie très loin d'un déterminisme microscopique en général très simple.

Les *Mathématiques non standard* (ROBINSON) ouvrent des perspectives qui nous semblent avec quelque rapport avec les précédentes, puisqu'elles recherche des structures apparaissant lorsqu'on itère un grand nombre de fois un processus microscopique, mais "avant d'arriver à l'infini".

La *Théorie des ensembles flous* (ZADEH) semble également fournir des concepts en rapport avec l'autonomie d'un niveau macroscopique, puisqu'elle part d'une valuation non manichéenne de l'appartenance d'un élément à un ensemble.

Nous allons passer en revue ces outils récents - très rapidement, et en renvoyant le lecteur à des ouvrages et articles de base pour plus de détail -, pour considérer leur pertinence vis-à-vis des problèmes de transferts d'échelles.

2.1 Théorie des catastrophes. Bifurcations

Dans les sciences concrètes, une échelle macroscopique apparait lorsqu'un phénomène global, tel qu'un changement de dynamique, apparait suite à une évolution continue du niveau microscopique,

dont les effets additifs atteignent un *seuil*. Ainsi, des variations climatiques lentes vont se répercuter de façon non linéaire sur la biologie ; la prolifération du phytoplancton marin va modifier l'albedo de la planète, en même temps que se modifient la répartition et l'importance des masses de glace, jusqu'à un point de non retour au niveau duquel se déclenche une nouvelle glaciation. Les phénomènes à la surface de la Terre sont alors rapidement modifiés, et pour longtemps. On a montre qu'une nouvelle glaciation s'installait en quelques centaines d'années, ce qui est faible par rapport à la durée des phases glaciaires et interglaciaires. L'évolution climatique a subi une ***bifurcation,*** de sorte que l'histoire du climat peut désormais se décrire à deux échelles de temps :

(l) l'échelle des variations interannuelles ou interséculaires, caractérisés par des dérives lentes, des périodicités etc. ; et

(2) l'échelle du million d'années a laquelle *de bifurcation en bifurcation* peut être décrite une histoire macroscopique.

La théorie des catastrophes de THOM est une topologie - et une topologie *différentielle,* c'est-à-dire qu'a l'instar des théories mécaniques, elle part de propriétés géométriques différentielles (locales) et les intègre afin de mettre en évidence des ***singularités*** de part et d'autres desquelles une dynamique peut être "qualitativement différente", et éventuellement se diriger vers des états stables distincts. La "catastrophe" est le fil du rasoir de part et d'autre duquel les trajectoires de l'espace de phase vont se diriger vers un attracteur ou un autre.

La classification topologique des catastrophes et leur représentation géométrique ("fronce", "papillon" etc.), ainsi que l'évocation par des représentations mécaniques des attracteurs et des "fils de rasoir" (limites entre bassins d'attraction) : positions d'équilibre de billes au fond d'une série de godets etc. - sont aujourd'hui répétés ad nauseum dans tous les textes traitant des catastrophes dans les différents domaines de la science. Je ne donnerai qu'un exemple de modélisation, moins souvent utilisé nais évoquant très bien la notion de *bifurcation.*

Supposons qu'une bille se trouve dans une gouttière dont l'axe longitudinal soit courbé, de sorte que, la gouttière étant posée immobile sur un plan, le point d'équilibre la bille se trouve au point le plus bas du dispositif, Supposons maintenant que cette gouttière soit complexe, composée te deux rainures longitudinales parallèles A et B (Fig. 1). D'autre part tes rainures sont dissymétriques, sauf au milieu de la gouttière où elles ont toutes deux la même profondeur, Quand on va du milieu de la gouttière a une de ses extrémités, une des rainures s'approfondit, tandis que l'autre diminue pour finir par disparaître et n'être plus marquée que par un point d'inflexion, La rainure A est donc seule présente à une extrémité de la gouttière cannelée, et la rainure B à l'autre extrémité.

La gouttière a deux cannelures est, nous l'avons dit, courbée et peut se balancer sur le plan, Le point le plus bas du dispositif varie quand la gouttière se balance, Il est évident qu'à une extrémité de la gouttière, une bille n'a qu'une position d'équilibre, qui est le fond de la rainure A ou de la rainure B selon la position instantanée de la gouttière oscillante, vers le milieu de la gouttière il V a au contraire deux positions d'équilibre , elles sont équivalentes lorsque la gouttière est posée sur son milieu ; dans le cas contraire, une des positions d'équilibre est plus stable qu' une autre celle correspondant à la rainure la plus profonde localement, car il faudra une quantité de mouvement plus grande pour faire sauter la bille de ce logement,

Les profils transversaux de la gouttière à ses différents niveaux sont représentés sur la Figure 1,

Deux types de mouvements peuvent faire changer la bille de place:

(l) un mouvement brownien imprimé à la bille peut la faire sauter fortuitement d'une rainure à une autre ~d'autant plus facilement qu'elle se trouve dans une partie peu profonde d'une des rainures) ,

(2) un mouvement de balancement de la gouttière cannelée qui, rappelons le, est arquée et peut se balancer sur le plan, modifiant ainsi la position d'équilibre de la bille à l'intérieur de la cannelure où elle se trouve,

Ces deux types de mouvements, combines, aboutissent à *deux échelles de phénomènes* concernant les déplacements aléatoires de la bille.

Quand la gouttière cannelée se trouve dans une position extrême de son balancement, une seule des deux cannelures correspond à une position stable de la bille armée d'un mouvement brownien, Quand la gouttière revient vers sa position médiane, la probabilité de présence de la bille dans l'une ou l'autre cannelure s'équilibre progressivement.

Supposons que la position de la gouttière par rapport à son mouvement de balancement potentiel soit elle aussi aléatoire, et indépendante du mouvement brownien de la bille Si la gouttière reste un certain temps dans une des deux positions excentrées, la bille aura de fortes chances de rester dans la même cannelure, soit A soit B, Il en est de même si la gouttière passe d'une position excentrée à la position médiane (les deux bassins d'attraction sont alors équiprobables, mais il faut une forte quantité de mouvement pour que la bille saute d'une cannelure à l'autre vers le milieu de la gouttière). Au contraire, si la gouttière se balance davantage, passant d'une position excentrée a une autre, la bille a de plus en plus de chances de changer de rainure, Cette "bifurcation" s'étant réalisée, quand la gouttière reprend une position plus centrale, la bille reste dans la cannelure où la précédente fluctuation l'avait placée.

Si les mouvements de basculement de la gouttière sont aléatoires, d'amplitude tantôt faible, tantôt forte, la bille va osciller de façon également aléatoire entre une position d'équilibre dans a et une position d'équilibre dans B, On pourra faire une distinction,n entre

(1) les mouvements aléatoires de la bille à l'intérieur d'une même rainure (ces mouvements étant dus à la fois au mouvement brownien de la bille et aux balancement de faible amplitude de la gouttière), et

(2) les passages sporadiques d'une rainure à une autre, c'est-à-dire les bifurcations successives

Le premier type de mouvements correspond à une vision microscopique, temporairement locale, de l'évolution du système, En revanche, de bifurcation en bifurcation se décrit une "histoire" du système, à une échelle de temps macroscopique, Le transfert de causalité d'une échelle de temps à une autre a été réalise par un effet de seuil, lie à l'existence d'un point de catastrophe.

Ce système fournit le principe d'une *dynamique à deux niveaux d'appréhension* que l'on pourrait appeler la "dynamique proximale" et la "dynamique historique". La bille symbolise, par exemple, une population multispécifique subissant des fluctuations plus ou moins aléatoires dues à sa dynamique interne et à son couplage avec l'environnement. Les mouvements de la gouttière cannelée évoquent, elles, les variations de l'environnement, selon un rythme indépendant du premier. Ces dernières peuvent susciter des variations importantes, par exemple, des proportions d'espèces, au point parfois qu'un changement de dominance s'établit et persiste (passage de la bille d'une "rainure" à l'autre) jusqu'au prochain changement de même ampleur.

Les bifurcations et les instants où elles se produisent ne peuvent pas être prévues exactement; seules leurs probabilités sont éventuellement calculable a partir de caractères statistiques des dynamiques sous jacentes. PRIGOGINE (1979, 1980, 1988), au terme d'une réflexion sur la récente *Thermodynamique des phénomènes dissipatifs* dont il est le promoteur, parle d'une "réhabilitation du temps" en physique au sens où celui-ci cesse d'être un simple contenant des phénomènes physiques comme l'espace [1], mais redevient *devenir* et *histoire :* de bifurcation en bifurcation se décrit une histoire irréversible.

---

[1] Une "révolution" similaire devrait avoir lieu pour la notion d'espace, c'est à-dire que l'on devrait, dans l'analyse des systèmes, introduire le temps et l'espace comme des facteurs ou des variables explicatives, et pas seulement servir de cadre (de récipient) aux dynamiques, Ce point de vue commence à prévaloir en l'Analyse des Données ; certaines techniques numériques introduisent en effet le temps et l'espace comme des variables s'ajoutant aux autres variables mesurées,

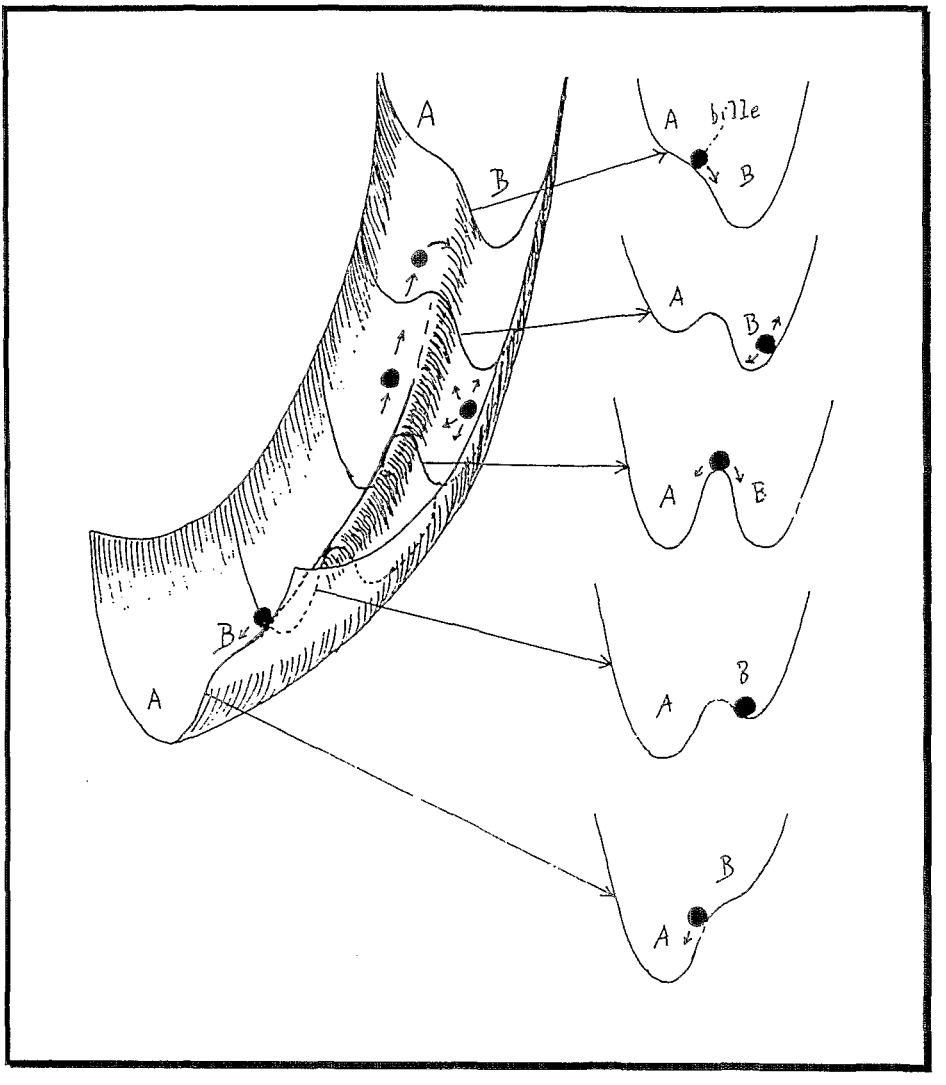

Figure 1 - 5 profils transversaux de la fonction potentiel

En écologie, dans les sciences sociales, etc., une telle dualité a toujours été prise en compte : les facteurs expliquant l'état actuel d'un système doivent être recherchés à la fois dans sa dynamique d'interaction avec le milieu (présence de facteurs limitants etc. : les "facteurs proximaux"), mais aussi dans le "facteur historique". Un écosystème n'est pas immuable mais passe par des phases juvénile, de maturation, de sénescence. Cette évolution est due à sa dynamique interne, qui n'est pas toujours continue mais montre des sauts, au niveau desquels des bifurcations apparaissent, provoquées aussi bien par cette dynamique interne que par des événements extérieurs. Et "de bifurcation en bifurcation" une histoire se décrit, que l'on doit connaître pour comprendre le présent, tout comme dans l'Evolution des organismes.

La Théorie des catastrophes de THOM aide donc puissamment à comprendre la théorie de bifurcations, qui explicite un transfert d'échelles. On passe par un transfert d'échelles de *l'ensemble des fluctuations proximales* à *l'ensemble des bifurcations :* bifurcations successives dans le temps, donnant une "histoire", mais aussi tout ensemble de bifurcations dans l'espace, ou simplement conceptuelles (dans le continuum des complexités par exemple), faisant passer d'une échelle d'appréhension à une autre.

Toutefois cette théorie reste une théorie différentielle, analogue aux théories de la Mécanique, avec la seule différence qu'elle explicite et montre l'importance des ensembles de points singuliers. La branche appartient à la *géométrie différentielle* et c'est l'ensemble des singularité~ qui décrit le niveau macroscopique. Nous verrons dans d'autres outils mathématiques récents révèlent d'autres mécanismes de l'émergence d'un niveau macroscopique.

2.2 - Géométries fractales.

Les géométries fractales introduisent d'emblée, et par définition, la notion d'échelle puisqu'elles postulent au départ une ***invariance d' échelle :*** toute partie est un "modèle réduit" de l'ensemble, comme une branche d'arbre simule l'arbre entier. Si l'homométie interne *(self-similarity)* est rigoureusement respectée il est impossible, observant une partie de l'objet, de savoir à quel niveau d'observation on se trouve. La question, d'ailleurs, n'a aucun sens en théorie puisqu'un objet parfaitement auto-similaire est infini dans les deux sens : il y a une infinité de structures homothétiques plus grandes et a une infinité de structures homothétiques plus petites que celle que l'on est en train de représenter.

En fait les géométries fractales ne respectent pas toujours cette invariance d'échelle : le fameux *ensemble de Mandelbrot,* par exemple, n'est pas invariant d'échelle, tout en ayant une dimension fractale unique.

Les objets réels ne sont qu'approximativement fractals (comme une table n'est qu'approximativement plane, un fil approximativement linéaire). Le processus générateur de la géométrie d'un objet à fragmentation ou ramification discrète n'est répété qu'un certain nombre de fois, généralement entre 3 ou 4 et une dizaine. A une échelle supérieure à celle de l'objet, ainsi qu'à une échelle inférieure à la plus fine des structures observées dans cette géométrie, il peut apparaître de nouvelles dimensions.

Le transfert d' échelle est également décrit dans le cas de *fractale, abstraite* (si l'on veut, comme Mandelbrot, conserver le caractère géométrique de la notion de fractale, on parlera de "fractales dans un espace abstrait de représentation") . Il s'agit alors du *caractère fractal d'une organisation,* et le transfert d' échelle se fera en considérant des niveaux successifs d'organisation (ou "niveaux

d'intégration"). Parfois cette organisation a une forte composante spatio-temporelle, et l'on retrouve la géométrie et la cinétique concrètes de l'objet analysé. D'autre fois, il y a davantage de délocalisation. Par exemple, la *diversité spécifique* dans un écosystème est une propriété fractale (FRONTIER, 1985, 1987). La répartition des individus d'un écosystème en espèces de divers niveaux d'abondance, correspondant à divers niveaux de spécialisation dans les rôles joués au sein du système, correspond à une optimisation de ce qu'on pourrait appeler la "gestion de l'information dans un écosystème". Les lois observées ont des points communs avec celles constatées dans d'autres systèmes d'information (lois de Pareto dans les systèmes linguistiques, socio économiques etc.) et sont modélisées par le *lexicographic* tree de MANDELBROT.

2.3 Relateurs arithmétiques.

Cet outil mathématique est moins connu ; il a été élaboré à partir de 1971 et est actuellement perfectionne par le Groupe SYSTEMA (Th. MOULIN et collab.). Il s' agit d' un algorithme diophantien (c'est-à-dire restreint aux nombres entiers) déterminant un cheminement sur un réseau, et censé modéliser une structure et une dynamique. Des exposés didactiques du fondement de la méthode pourront être trouvés dans MOULIN (1986, 1989), et de ses diverses applications dans les numéros 9 à 12 des *Cahiers SYSTEMA. le Rapport de Recherche de décembre 1989* (CHAUVET et al.). et les comptes rendus divers Congrès.

Il est impossible de résumer la théorie en quelques mots. L'objectif affiché est de "représenter le réel", et particulièrement de rendre compte d'un certain nombre de *formes* et de *morphogenèses* notamment en physique (modèles d'atomes et de molécules), biophysique, biologie et même économie. Les recherches pour affiner l'outil et l'appliquer sont en plein essor et les auteurs y entrevoient un langage opérationnel éminemment applicable aux systèmes.

Le modèle doit répercuter certains caractères des systèmes complexes, en particulier biologiques : (1) *processus de naissance-vie-mort, (2)* fractales, correspondant à d'autres contraintes physiques. Ainsi un arbre a une dimension fractale et une autosimilarité réalisée sur une dizaine de niveaux de ramifications ; au delà du plus fin rameau, le parenchyme foliaire réalise une "éponge" d'une autre dimension fractale ; au delà de l'arbre, la foret est une autre structure, qui réalise l'interpénétration des éléments interactifs à l'interface atmosphère/sol.

Le transfert d'échelle est donc différent (1) à l'intérieur d'un intervalle de tailles ou l'homothétie interne est respectée, et (2) au niveau de "sauts" qualitatifs où la dimension fractale change.

L'importance des géométries fractales est évidente dans le cas des des systèmes faits de matière et d'énergie. De tels système (comme les systèmes vivants à toutes échelles d'observation) fonctionnent par des **flux d'énergie à travers des interfaces** Une biomasse est un *volume* géré par des surfaces. Si en grandissant un organisme vivant ne changeait pas de forme, le rapport des surfaces aux volumes deviendrait vite insuffisant : il est nécessaire que les surfaces augmentent plus vite que proportionnellement au carré des dimensions linéaires. Cela Justifie la génération d'une géométrie fractale au cours de toute croissance (exemple : croissance d'un arbre par ramification tant de ses branches que de ses racines, afin d'assurer un contact suffisant avec l'atmosphère et le sol), et également l'utilisation d'une géométrie fractale de l'environnement (fragmentation du sol; turbulence hydrodynamique renouvelant les surfaces de contact, etc.).

De fait, lorsqu'on examine précisément l'augmentation des performances d'un système physico-chimique en fonction de sa géométrie fractale, par exemple les performances d'un catalyseur en fonction de son degré de fragmentation, on s'aperçoit que l'efficacité pratiquement maximale est obtenue après un nombre réduit de répétitions du processus générateur (voir VILLERMAUX *et al.*, 1986 et nombreux exemples dans CHERBIT édit., 1987). Cela explique pourquoi les objets biologiques ne réalisent leur ramification que sur un petit nombre d'itérations, suffisant pour obtenir l'effet matériel escompté. Au dessus et au dessous, d'autres contraintes physiques peuvent apparaître, justifiant d'autres géométries. Un système vivant, considéré depuis l'échelle infra-cellulaire jusqu'à l'échelle de l'écosystème, est donc redevable de plusieurs géométries fractales, avec des sauts à certains niveaux d'observation particuliers - ce qui, entre autres, permet d'affirmer que le choix d'une échelle d'observation n'est pas complètement arbitraire ni contingent.*processus sous-jacents cycliques, (3) imbrication de niveaux d'organisation* (le troisième caractère est le plus en rapport avec notre propos, mais les trois sont liés).

Les bases mathématiques sont simples et en rapport avec les processus fondamentaux du vivant. Deux types de variables sont mises en oeuvre : des variables "principales" et des variables "d'environnement". L'algorithme décrit une itération aboutissant à des *processus cycliques*, qui peuvent se bloquer ; le déblocage est lié à un "appel à l'environnement" (environnement considéré comme une réserve d'énergie et d'information pour le système). Le système se caractérise donc par une succession de phases de fermeture sur lui-même, et de phases d'ouverture.

Le caractère discret des changements d'état modélisés (lié à l'utilisation des nombres entiers et a un réseau cristallographique de base) donne la possibilité d'utiliser l'ordinateur pour des itérations très nombreuses, au terme desquelles *des "formes" apparaissent, non prévues initialement.* Précisément, des descriptions parallèles d'un grand nombre de sous-systèmes fonctionnement de façon identique, à partir d'états initiaux voisins donne (à la grande surprise des

auteurs lors de leurs premières recherches) des objets et des comportements fortement structures, évoquant des configurations florales en trois dimensions, des organes etc., avec des transformations brutales au voisinage de certaines singularités métriques évoquant l'apparition de nouvelles parties de l'organe, etc.

Le processus a été comparé au développement parallèle de nombreuses cellules, donnant un organe ou un organisme. Par ailleurs un relateur peut être "piloté" par un relateur dit réduit, de plus petite dimension, comme un enzyme ou une molécule d'ADN le fait pour une entité biologique de plus grande taille.

Enfin - et c'est fondamental pour notre problème de transfert d'échelles - les formes émergentes sont constituées d'amas, eux-mêmes formés de sous-amas et ainsi de suite, impliquant l'existence de niveaux de description imbriqués (Fig. 2a).

Il serait, évidemment, hâtif de dire qu'on a trouvé ainsi le "modèle" d'un organe précis. L'enseignement à tirer de ce processus de calcul, et de ses résultats extrêmement suggestifs, est que d'un processus "microscopique" simple (simple règle de génération pas-à-pas), il *émerge une forme macroscopique hautement structurée* et, qui plus est, à structure *hiérarchisée*. Ces formes macroscopiques, extrêmement singulières et évocatrices avec leurs symétries ou pseudo-symétries et leur organisation hiérarchique à nombreux niveaux (Fig. 2b), ne sont nullement prévues dans le formalisme local simulant le mécanisme sous-jacent : on se contente de constater leur émergence. A noter que ces structures sont liées à une *complexification du système par intégration de l'environnement*, Le formalisme d'un *transfert d'échelles* est ici évident.

Des relations ont été discernées entre les relateurs arithmétiques, la théorie des catastrophes, les fractales, l'entropie de Shannon, la théorie des automates cellulaires et des réseaux neuronaux etc.

2.4 - **Théorie du chaos. Attracteurs étranges.**

A l'opposé des relateurs arithmétiques, la dynamique chaotique est actuellement l'objet d'une très grande diffusion médiatique - en même temps, bien sûr, que d'une application à un très grand nombre de domaines scientifiques. Le lecteur non spécialiste en trouvera des exposés didactiques en langue française dans plusieurs articles récents de La *Recherche* et de *Pour la Science*, ainsi que dans les ouvrages de DE GENNES édit. (1987) et GLEICK (1989).

La dynamique chaotique est une conséquence directe de la *sensibilité au conditions initiales* évoquée au §1 de cet exposé. Cette sensibilité confère à nombre de systèmes physico-chimiques naturels et artificiels un comportement erratique et imprévisible - y compris dans le cas de systèmes mécaniques dont on attendait qu'ils fussent déterministes et aient un comportement simple. Ce

comportement apparait dès qu'il y a plus de deux variables interactives.

Dans un système réel (nous parlerons un peu plus loin de leurs simulations), le chaos s'installe selon un certain scénario lorsqu'on augmente progressivement certaines contraintes. Si par exemple on augmente le forçage d'un système dissipatif par un flux d'énergie croissant, on voit d'abord apparaître une périodicité, puis une multiplication des périodes par doublement. Dans une conception antérieure du phénomène de turbulence, on imaginait que ces périodes augmentaient en nombre indéfiniment, donnant par leur ensemble l'impression de phénomène complètement enchevêtré caractérisant le phénomène macroscopique. On s'est aperçu qu'au contraire qu'après un très petit nombre de doublement de périodes (deux ou trois), le phénomène devenait brusquement chaotique, c'est-à-dire totalement non périodique. En outre, les contraintes augmentant encore, des périodes pouvaient réapparaître par bouffées, puis disparaître au profit d'une nouvelle phase de chaos, et ainsi de suite. Le chaos est donc un phénomène très spécifique, très répandu, apparaissant a divers états énergétiques d'un système. Le passage de l'ordre au chaos a fait l'objet de nombreux travaux et n'est pas encore entièrement compris. La dynamique chaotique implique un certain nombre de paradoxes apparents.

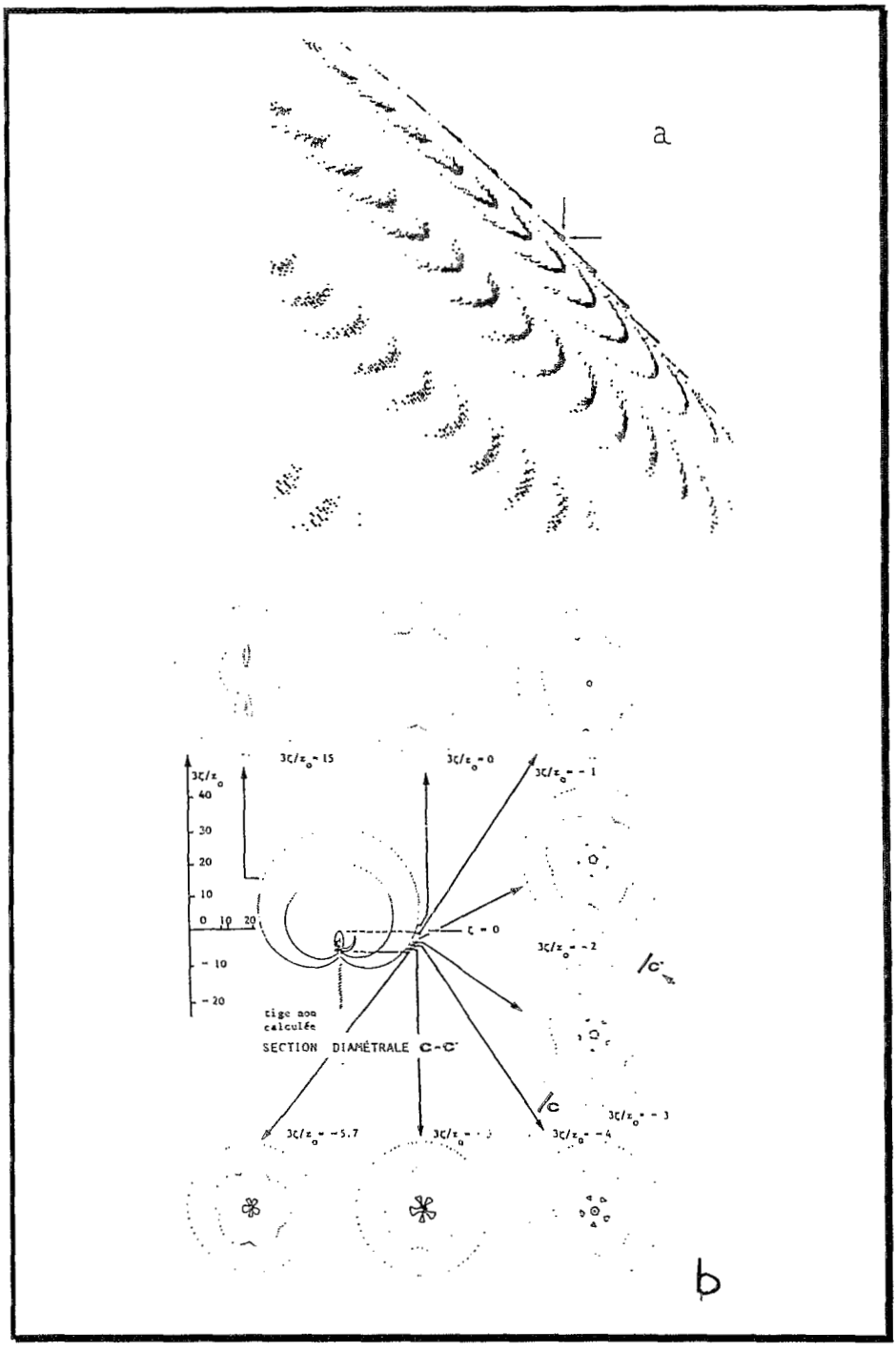

Figure2 - Figures obtenues par les relateurs arithmétiques
a- Amas emboîtés (d'après MOULIN, 1986)
b - Styructures complexes à 3 dimensions ("configurations florales") (d'après VALLET, 1982)

Le **PREMIER PARADOXE** est que le comportement appelé "chaotique", dont la première conséquence est une *imprévisibilité* du système, est *rigoureusement déterministe.* Il peut être reproduit, en fait, à partir d'un petit nombre d'équations non linéaires à plus de deux variables. La première modélisation d'un système chaotique très simple est celle, bien connue, du météorologue LORENZ.

Celui-ci établit un modèle caricaturalement simple de climat et explora ses conséquences. Le système d'équation pouvait difficilement être plus simple, comprenant en effet en tout et pour tout les trois équations différentielles du premier degré par rapport à chaque variable :

$$\frac{dy}{dt} = -ax+ay$$

$$\frac{dy}{dt} = bx - y - xz$$

$$\frac{dz}{dt} = -cz + xy$$

dont on attendrait, en les intégrant, qu'elles fournissent un comportement simple et prévisible. Il n'en est rien : le système décrit une trajectoire chaotique, et une sensibilité aux conditions initiales fait que deux trajectoires partant presque du même point finissent par diverger exponentiellement. Comme aucun "point de départ" ne peut être expérimentalement déterminé avec une précision infinie, il s'ensuit qu'un phénomène physique simple déterminé par ces équations *déterministes* est imprévisible.

Le **DEUXIEME PARADOXE** est que *ce chaos est ordonné.* On s'en rend compte en suivant les trajectoires suivies par le système dans l'"espace de phases" c'est-à-dire l'espace multidimensionnel ayant comme coordonnées les trois variables et leurs vitesses de variations.

Si un système évolue vers une stabilisation, sa trajectoire dans l'espace de phase s'enroule vers un point dont les coordonnées correspondant aux valeurs des positions et des vitesses d'équilibre (Fig, 3 a), soit vers une trajectoire cyclique limite traduisant un mouvement périodique indéfiniment répété (Fig, 3b), S'il v a deux périodicités simultanées, les trajectoires s'enrouleront autour d'un tore, dont la surface sera occupée de façon dense on non selon que les deux périodes sont irréductibles ou ont un dénominateur commun, Points d'équilibre et "cycles limites" sont appelés des attracteurs,

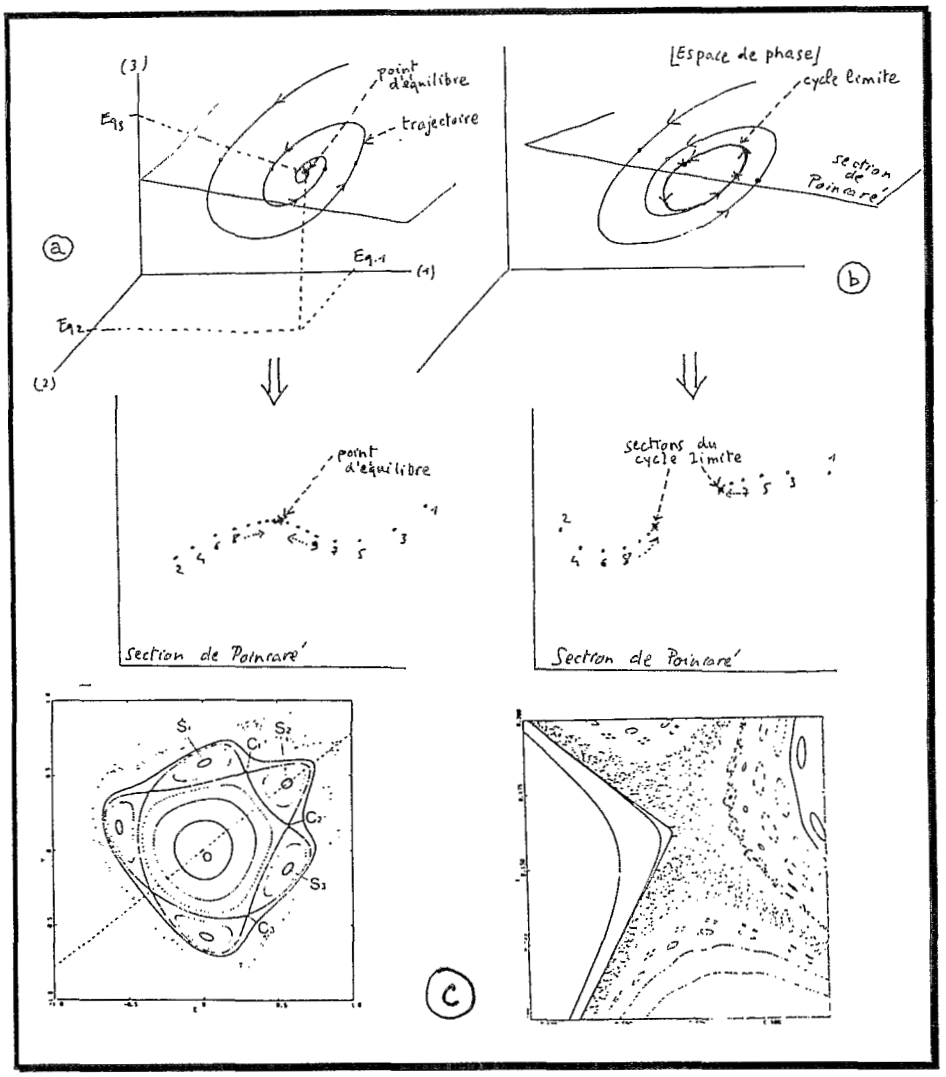

Figure 3 - Attracteurs
c - Section de Poincaré d'un attracteur étrange (vue à deux échelles d'observation) figure fractale (d'après EKELAND, 1984)

Pour simplifier la description des trajectoires on a recours aux "coupes de Poincaré", obtenues en les intersectant par un plan quelconque de l'espace de phase, chaque fois que la trajectoire se boucle, elle marque un point dans le plan d'intersection, et la suite des point.s d'intersection visualise l'attracteur dans deux dimensions, ainsi, si la trajectoire s'enroule autour d'un point limite et si le plan passe par ce point., les intersections successives seront des points se rapprochant de plus en plus du point limite , si elle s'enroule autour d'un cycle limite, le plan de Poincaré contiendra deux points limites dont les intersections se rapprocheront alternativement, Etc...

Si la trajectoire est chaotique, elle ne passera Jamais deux fois de suite par le même point et il n'y a pas de comportement périodique. Les points d'intersection se dispersent alors sur la coupe de Poincaré, mais pas n'importe comment : on observe, après un nombre suffisant d'itérations, que les points se disposent en figures plus ou moins régulières, en amas qui progressivement prennent des *formes "étranges"* - montrant des structures, des symétries, des homothéties internes montrant que la disposition des trajectoires, bien que "chaotique", est loin d'être aléatoire.

Plus précisément, la position d'un nouveau point d'intersection parait être réalisée "au hasard" car elle est imprévisible, et deux points successifs peuvent être très éloignés l'un de l'autre : ainsi se concrétise *l' imprévisibilité.* Cependant quand un très grand nombre de points a été obtenu, on s'aperçoit que la densité de probabilité des trajectoires est différente dans les différentes parties de l'espace de phase, et que ces variations de densité dessinent des formes qui, elles aussi, semblent "attirer" les trajectoires autour de certaines régions. On a nommé **attracteurs étranges** de telles distributions des trajectoires de phase, donnant dans un plan de représentation l'impression d'être constituées de "formes dans le brouillard~ : elles émergent d'un brouillard de points d'intersection, n'en étant distincts que sous forme de zones plus denses (Fig. 4).

Une des caractéristiques importantes de ces attracteurs étranges est de posséder une *dimension fractale.* En effet il apparait une homothétie interne (au moins approximative), la "forme" étant composés d'amas, eux mêmes hétérogènes c'est-à-dire composés de sous-amas, de sous-sous amas etc., à la manière d'un des ensembles de Mandelbrot.

Les propriétés de la dynamique chaotique sont développées dans les nombreuses publications sur ce sujet, et font actuellement l'objet de recherches actives allant de la physique a la dynamique des populations vivantes. Ce que nous retiendrons, dans le cadre de notre inventaire des transferts d'échelles conceptuels, est le passage d'un **niveau microscopique** (différentiel) représenté par les équations simples de départ, à un **niveau macroscopique** qui est celui de l'attracteur étrange. Ce passage existe aussi pour les autres types d'attracteurs, mais il reproduit alors exactement le passage différentielle-intégrale évoqué dans le §1 : l'attracteur étrange a, en plus de ces derniers, la propriété de faire émerger progressivement une structure complexe, jamais terminée puisqu'elle est de nature fractale et se complète progressivement, et en tous cas non prévue par les équations de départ simples. En d'autres termes, le microscopique aboutit à l'impossibilité de toute prévision de détail, mais l'itération indéfinie du processus fait apparaître une certaine possibilité de description, qui correspond exactement à l'émergence d'un niveau macroscopique, qui *a sa complexité propre.*

On peut même tirer un peu plus loin de "la leçon du chaos" et découvrir un TROISIEME PARADOXE. En effet, si le chaos apparait avec un nombre réduit de variables simultanées (il apparaît à partir

de trois "paramètres d'ordre"), on s'attendrait à ce que dans les systèmes réels, subissant l'influence d'un nombre *a priori* bien plus grand de paramètres, le chaos devrait se traduire par des attracteurs d'un degré. de complexité bien plus grand, et même totalement enchevêtrés et impossible à appréhender humainement. Or il semble qu'il n'en soit rien : la complexité des phénomènes réels semble être du même ordre que celle des systèmes simulés a partir d'un petit nombre d'équations !

Tout se passe donc comme si *le phénomène macroscopique avait son degré de complexité propre, indépendant du degré de complexité du niveau miscroscopique sous-jacent.* C'est bien là la définition d'une *autonomie du niveau macroscopique par rapport au niveau microscopique,* justifiant la recherche d'une structure et d'une previsibilité attachée à son niveau propre. En d'autres termes, il serait fondamentalement (et pas seulement pratiquement) inutile de prospecter le microscopique pour comprendre les structures, les fonctions et les évolutions d'un niveau macroscopique.

Si cette règle se confirmait, elle équivaudrait à une véritable révolution scientifique, du moins du point de vue de la science réductioniste.

2.5 - Analyse non standard.

L'analyse non standard est une branche très récente des mathématiques, pratiquée en France par quelques équipes de Strasbourg et de Mulhouse à la suite des travaux de l'Américain ROBINSON.

L'attitude de ces chercheurs est hétérodoxe par rapport aux mathématiques "pures" (pour lesquelles, disent-ils, "la théorie est seule réelle et la réalité est un fantasme") . Les mathématiques non standard essaient en effet de "mieux rendre compte de 1' infinie complexité du réel" grâce a 1'*introduction d'états intermédiaires entre le* fini *et* 1 *' infini.*

Si l' on considère tous les nombres, si grands soient-ils, auxquels on peut assigner une valeur (en d' autres termes, que 1' on peut *écrire* - ces nombres ont été appelés "nombres naïfs)), il en reste une *infinité* d'autres qui sont plus grands encore sans être égaux à la "limite infinie". De même, si 1' on considère 1' inverse de tous les nombres entiers, et si 1' on met de coté les inverses des nombres de la première catégorie, il en reste *une infinité* qui sont encore plus petits, sans être nuls. Les "non naïfs" constituent d'une part un no-man's-land entre le fini et l' infini, d'autre part un "halo" autour de chaque nombre naïf, correspondant à une sorte de pouvoir de résolution conceptuel.

Une reformulation s'en est suivie de beaucoup de problèmes classiques de mathématiques, en particulier dans le domaine des

équations différentielles et de l'approche d'une asymptote. Qui plus est, des problèmes nouveaux ont pu être résolus, précisément en rapport avec les questions que nous avons évoques dans ce qui précède, à savoir le comportement au voisinage de bifurcations, les structures fractales, la transition entre un état oscillant et un état chaotique, etc. La Justification fondamentale d' une telle façon de faire est qu' *il se passe des; choses entre l'échelle d'observation usuelle et l'infini,*

Cette dernière hypothèse de travail est nouvelle en mathématiques (les mathématiques ont toujours exclu la "taille" d' un nombre, considérant tous les nombres sur un pied d'égalité, et simplement, en plus, des "limites infinies"). Elle n'est pas nouvelle dans les sciences du réel, à commencer par la physique; mais dans l'utilisation de l'outil mathématique par la physique il fallait autant de théories mathématiques que d' échelles d'observation. Tout au plus, comme nous l'avons rappelé au § 1, l'intégration d' un système d' équations différentielles donnait une nouvelle équation, celle du phénomène macroscopique, mais sans "intermédiaire" possible. Grâce à l'analyse non standard, il devient possible d' intégrer la notion d' échelle et, selon les besoins, d' examiner une loi mathématique soit avec un "microscope" pour en voir les détails (comportement au niveau d'une bifurcation), soit avec un "macroscope" pour avoir une idée globale d' un phénomène apparaîssant mal si 1' on reste " le nez sur le détail" .

Des applications a de nombreux domaines concrets ont déjà porté des fruits, en permettant de comprendre la genèse de phénomènes jusque là paradoxaux (comme des retards à l'apparition d'un phénomène oscillatoire), et qui sont désormais expliques par des propriétés mathématiques de l'équation du phénomène. Ces propriétés n'avalent simplement pas été vues" auparavant faute de se placer à la bonne échelle *conceptuelle* d'observation ! On trouvera des exemples dans quelques articles de La *Recherche* ce sujet.

L'existence de ces mathématiques nouvelles est suggestive a l'égard des nombreuses structures citées plus haut. En effet, que ce soit dans le domaine des structures fractales, des relateurs arithmétiques ou des attracteurs étranges, des *formes* apparaissent lorsqu'on itère un *très grand nombre de fois* une règle de génération, *mais pas un nombre infini de fols.* Les structures macroscopiques émergeant par itération d'une règle simple sont parfois complètement noyées si l'on poursuit cette itération "jusqu'à l'infini" : un attracteur étrange finit par occuper de façon dense le plan de coupe de Poincaré, dans lequel des formes singulières apparaissaient pour des nombres très grands, mais finis, d'itérations.

Les mathématiques classiques sont capables de prévoir ce qui se passe à l'infini, mais non ce qui se passe avant l'infini. C'est la raison de leur échec à prévoir les formes "étranges" émergeant de la construction d'un attracteur chaotique ou d'une fractale : aucune explication mathématique ne peut, encore actuellement, rendre compte des pseudo-périodicité, quasi-symétries etc. observées dans

un attracteur fractal. Les démonstrations de propriétés *asymptotiques* aboutissent même à des fais en apparence contradictoires avec l'observation. Par exemple, il est connu que l'ensemble fractal de Mandelbrot montre, après des milliers ou des millions d'itérations, des "îlots" séparés de la figure principale. Mais on n'a jamais poursuivi la génération de l'image fractale des *milliards* de fois pour voir ce qu'il advient de ces îlots. Or il a été récemment démontré qu'"à la limite" (limite infinie), ces îlots sont connexes, c'est-à-dire non isolés. Cette démonstration ne rend pas compte de l'existence d'îlots à un stade intermédiaire : la structure intermédiaire a été gommés par le passage à la limite.

Or ce sont ces structures intermédiaires qui nous intéressent, dans la mesure où elles décrivent le passage d'une échelle microscopique à une échelle macroscopique des phénomènes. Pour revenir au concret, dans l'analyse de l'écologie des masses d'eau par exemple, ce qui nous intéresse est l'hétérogénéité du milieu grâce à laquelle des eaux aux caractères complémentaires entrent en contact et réagissent - l'une apportant par exemple des sels nutritifs remontés de la profondeur, l'autre de la chlorophylle qui s'est formée à la lumière en surface. *Un écosystème homogène ne pourrait jamais fonctionner* (pas plus qu'une société ou tout le monde aurait le même métier, le même niveau de vie et le même pouvoir décisionnaire). La poursuite indéfinie d'un mixage turbulent aboutit à l'homogénéisation complète, c'est-à-dire à l'absence de structure de la masse d'eau, alors que c'est au contraire (comme nous l'avons exposé à propos des "Transferts d'échelles en océanographie") l'existence de surfaces de contact au sein d'un milieu hétérogène qui permet un fonctionnement à une échelle globale.

Le *transfert d'échelles* est donc un phénomène apparaissant lorsqu'on change d'ordre de grandeur des nombres et des phénomènes - et non lorsqu'on "passe à l'infini". Non seulement il n'est pas nécessaire d'"aller jusqu'à l'infini" pour mettre en évidence des phénomènes macroscopiques, mais il ne faut pas le faire, car on gomme souvent, de cette façon, le phénomène que l'on voulait décrire. Le passage à la limite étant une des bases de la mathématique standard, on entrevoit l'espoir que portent en elles les mathématiques "non standard", "irruption de la réalité dans les mathématiques".

CONCLUSION

C'est à une sorte de révolution scientifique que l'on assiste lorsqu'on fait le bilan des tentatives actuelles pour décrire et formaliser la complexité du réel, en prenant le contre-pied à la fois (1) d'une physique remplaçant les objet concrets par des dispositifs expérimentaux maîtrisables - on étudie alors la physique des appareils et non celle de la nature - ; (2) d'une mathématique faisant tout pour fuir la réalité et trouvant en elle-même sa justification.

Même la physique instrumentale et les mathématiques pures bénéficieront de ce changement, puisqu'on devient maintenant capable de maîtriser des objets d'une grande complexité liée à leur géométrie fractale, et que les mathématiques cessent de considérer comme des "monstres" les fonctions. qui n'ont pas de dérivée.

Mais c'est évidemment dans le domaines des *sciences du complexe*, biologie, écologie, sociologie ... - les "sciences molles", par opposition aux "sciences dures" par lesquelles la physique et les mathématiques s'auto-désignent -, que ces tentatives, toutes "non standard", apportent le plus d'éléments. Géométrie fractale, relateurs arithmétiques, dynamique chaotique, alliés sans doute à l'analyse non standard et peut-être à quelques autres théories mathématiques comme celle des ensembles flous, seront sans doute l'épine dorsale de la Cybernétique de demain car ils introduisent une dimension supplémentaire de l'espace-temps : la dimension d'échelle.

REFERENCES

BLANCHARD (D.), DUJET (C.), FRONTIER (S.), LEGENDRE (P.), QUINET (C.), 1986 - Fractals, flous et catastrophes en écologie. Implications pour les stratégies d'échantillonnage. IN S. Frontier édit., *Evaluation* et *optimisation des plans d'échantillonnage en écologie littorale.* Rapport d'ATP PIREN/CNRS : 291-354.

BRADBURY (R.H.) & REICHELT (R.E.), 1983 - Fractal dimension of coral reef at ecological scales. *Mar. Ecol. Progr. Ser*, 10 : 169-171.

BRADBURY (R.H.), REICHELT (R.E.) & GREEN (D.G.), 1984 - Fractals in ecology : Methods and interpretation. *Mar. Ecol. Progr. Ser., 14 :* 295-296.

BURROUGH (P.A.), 1981 - Fractal dimensions of landscapes and other environmental data. *Nature,* London, 294 : 240-242.

CASTI (J.), 1982 - Catastrophes, control and the inevitability of spruce budworm outbreaks. *Ecol. Model.*, 14 : 293-300.

CHAUVET (F.), MOULIN (T.), RIOT (P.), SAINT-PAUL (L.) & VALLET (C.), 1990 Relateurs arithmétiques. Travaux de Groupe Systema publiée en 1989. Ecole Nationale Supérieure des Techniques Avancées, Rapport de Recherche 241, 99 p.

CHERBIT (G.) édit., 1987 - *Fractals. Dimensions non entières et applications.* Masson, Paris, 362 p.

CRUTCHFIELD (J.), ABBOTT (A.), PACKARD (N.) & SHAW (R.), 1987 - Le chaos. *Pour la Science,* 112 (février 1987) : 18-25.

DIENER (M.) & LOBRY (C.) édit., 1985 - *Analyse non standard et représentation du réel.* Coédition OPU (Alger) et CNRS.

DIENER (F.) & DIENER (M.), 1989 - Les applications de l'analyse non standard. La *Recherche*, 20 (janvier 1989) : 68-83.

DUBOIS (D.), 1979 - Catastrophe theory applied to water quality regulation of rivers. *Math. Biosci.*, 28 : 243-274.

DUCKSTEIN (L.), CASTI (J.) & KEMPF (J.), 1979 - Modeling phytoplankton dynamics using catastrophe theory. *Water Resource Res.*, 15 : 11891194.

DUJET (C.), 1981 - *Ensemble co-flous et information.* Thèse 3ème Cycle, Univ. Lyon 1, 54 p.

DUJET (C.), 1982 - Complementation and information based on the separating power of a fuzzy set. *In M.M.* Gupta & E. Sanchez edit., Fuzzy *Information and Decision Processes.*, North Holland Publ. Cy.: 51-56.

DUJET (C.) & FRONTIER (S.), 1983 - Application of the separating power of a fuzzy set to ecological systems. Proceed. internat. Sympos. *Systems, Man and Cybernetics,*New Dehlhi, dec. 1983 : 513-516.

EKELAND (I.), 1984 - *Le calcul, l'imprévu.* Seuil, Paris, 166 p.

DELATTRE (P.), 1971, 1985 - *Système, structure, fonction, évolution.* Maloine, Paris, 184 p.

FRONTIER (S), 1985 - Diversity and structure in aquatic ecosystems *Oceanogr mar Biol . ann. Rev, 23 :* 253-312.

FRONTIER (S.), 1987 - Applications of Fractal Theory to Ecology. *In P.* Legendre & L. Legendre edit., *Developments in Numerical Ecology. NATO* ASI Series,Vol. G14, Springer Verlag: 335-378.

de GENNES (P. J .) édit ., 1987 - *L ' ordre du chaos.* Bibliothèque Pour la Science, 191 p.

GLEICX (J.), 1987 - *Chaos.* The Vicking Press, New York. Traduction française 1989: *La théorie du chaos.* Albin Michel Paris, 424 p.

GRASSBERBER (P.) & PROCACCIA (I.), 1983 - Characterization of strange attractors. *Phys. Rev. Lett., 50:* 346-349.

HAKEN (H.) edit., 1981 - *Chaos and Order in Nature.* Springer Verlag, 275 p.

HAKEN (H.) & WUNDERLIN (A.), 1990 - Le chaos déterministe. La *Recherche*, 225 (octobre 1990): 1248-1255.

HARMSEN (R.), ROSE (M.R.) & WOODHEUSE (B.), 1976 - A general mathematical model for insect outbreaks. *Proc. Entom. Soc. Ontario, 107 :11-* 18 .

HARTONG (J.), 1983 - L' analyse non standard. *La Recherche, 14* (octobre 1983): 1194-1201.

KENT (C.)& WONG (J.), 1982 - An index of littoral zone complexity and its measurement. *Can. J. Fish. aquat. Sci., 39:* 847-853.

JAKOBSON (R.) & THOM (R.), 1985 - *Les catastrophes de la parole.* Maloine, Paris, 354 p.

JONES (D. D.), 1977 - Catastrophe theory applied to ecological systems. *Simulation, 291 :* 1-15.

JONES (D. D.) & WALTERS (C. J .), 1976 - Catastrophe theory and fishery regulation. *J. Fish. Res. Bd. Canada, 33 :* 2829-2833 .

KAUFMAN (A.), DUBOIS (T.) & COOLS (M.), 1975 - *Exercices avec solutions sur la théorie des sous-ensembles flous.* Masson, Paris, 166 p.

KEMPF (J.), 1980 - Multiple steady states and catastrophes in ecological models. *ISEM J., 2:* 55-79.

LE MEHAUTE (A.), 1990 - *Les géométries fractales.* Hermès, Paris, 198 p.

LICHNEROWICZ (A.), PERROUX (F.) & GADOFFRE (G.) édit., 1976 - *Structure et dynamique des systèmes.* Maloine, Paris, 191 p.

MANDELBROT (B.), 1975, 1984, 1989 - *Les objets fractals.* 3ème édit., Flammarion, Paris, 268 p.

MANDELBROT (B.), 1977 - *Fractals. Form, chance and dimension.* W.H. Freeman and Cy, San Francisco, 365 p.

MANDELBROT (B.), 1982, 1983 - *The Fractal Geometry of Nature.* W. H. Freeman and Cy, San Francisco, 468 p.

MARK (D.M.), 1984 - Fractal dimension of coral reef at ecological scales. a discussion. *Mar. Ecol. Progr. Ser.*, 14 : 293-296.

MAY (R.M.), 1973, 1974 - Stability and *complexity in model ecosystem.* Princeton Univ. Press, 265 p.

MAY (R.M.), 1975 - Deterministic models with chaotic dynamics. *Nature,* London, 256 : 165-166.

MAY (R.M.), 1976 - Simle mathematical models with very complicated dynamics. *Nature,* London, 261 : 459-467.

MAY (R.M.), 1981 - Nonlinear phenomena in ecology and epidemiology. *ADR. New York Acad. Sci,* 357 : 267-281.

MEYER (J.A.), 1980 - Sur la dynamique des systèmes écologiques non linéaires. I. *Phys.* (Colloque C5, 1478 : suppl. au n°-8), 38 : 29-37.

MEYER (J.A.), 1981 - Sur la stabilité des systèmes écologiques purispécifiques. In B.E. Paulré édit., *System dynamics* and *analysis of chance.* North Holland Publ. Cy. : 335-351.

MOULIN (T.), 1986 - Présentation sommaire des relateurs arithmétiques. *Cahiers SYSTEMA, 12* : 25-113.

MOULIN (T.), 1988 - Tentative de modélisation d'un système neuronal au moyen d'un relateur arithmétique : problèmes posés et perspectives. VIII- Séminaire de Biologie Théorique, Abbaye de Solignac, 6-8 juin 1988, 22 p.

MOULIN (T.), 1989 - Le relateur arithmétique, source de nouveaux concepts systémiques. *Rev. internat. Systémique, 4*

NICOLIS (C.) & NICOLIS (G.), 1984 - Is there a climatic attractor? *Nature*, London, 311 : 529-532.

OTTINO (J.), 1989 - Le mélange des fluides. *Pour la Science*, 137 (mars 1989) : 32-43.

OUIMET (C.), 1985 - La théorie des catastrophes en écologie : élaboration d'un modèle de fronce à l'aide d'étapes graphiques et de régressions non linéaires. Mémoire de Maîtrise, Univ. de Montréal, 137 p.

OUIMET (C.) & BRASSELET (J.), 1985 - Critique sur un modèle de dynamique du phytoplancton. *Publ. IRMA*, Lille, 7 : 1-27.

PLATT (R.E.) & ULANOWICZ (E.) edit., 1985 - *Ecosystem theory for biological oceanography*. Proceed. Sympos. Quebec, 16-23 mars 1984. *C.an. Bull. Fish. Aquat. Sci.*, 213 : 260 p.

POSTON (T.) al STEWART (I.), 1978 - *Catastrophe theory and its applications*. Pitman Publ. Ltd., London, XVIII + 491 p.

PRIGOGINE (I.) & STENGERS (I.), 1979 - La *nouvelle alliance*. Gallimard, Paris, 302 p.

PRIGOGINE (I.), 1980 - *Physique, temps et devenir. Masson*, paris, 275 p.

PRIGOGINE (I.) & STENGERS (I.), 1988 - *Entre le temps et l'éternité*. Fayard, paris, 223 p.

ROBINSON (A.), 1974 - *Non standard analysis*. North Holland Publ. Cy.

ROSE (M.R.) & HARMSEN (R.), 1981 - Ecological outbreak dynamics and the cusp catastrophe. *Acta Biotheor.*, 30 : 229-253.

STEWART *(I.), 1982 - Les fractals* (bande dessinée). Belin, Paris, 67 p.

STEWART (I.), 1982 - *Oh ! catastrophe* (bande dessinée). Belin, Paris, 60 p.

THOM (R.), 1972 - *Stabilité structurelle et morphogénèse. W.A.* Benjamin, Readings, Massach., 362 p.

THOM (R.), 1980 - *Modèles mathématiques de la morphogénèse*. Christian Bourgeois, Paris, 315 p.

THOM (R.), 1982 - *Paraboles et catastrophes*. Flammarion, Paris, 193 p.

VALLET (C.), 1982 - Modélisation arithmétique de formes biologiques. *Cahiers SYSTEMA, 9 : 5-40.*

VALLET (C.), CHAUVET (F.), RIOT (P.), FERRE (M.) & MOULIN (T.), 1988 Introduction aux relateurs arithmétiques. Ecole Nationale Supérieure des Techniques Avancées, Document préparé par le Groupe SYSTEMA en vue de la réunion du 20 Juin 1988.

VAN STRATEN (G.) & KEMPF (J.), 1980 - Applications of catastrophe theory to water quality modeling : a review. Inst. Applied System Analysis, collaborative paper CP-80 12, Laxenburg, Austria, 24 p.

VERINE (H.), 1986 - Importance potentielle des fractales en biologie. Communic. YIème Séminaire de Biologie Théorique, Abbaye de Solignac, 26-29 mai 1986, 18 p.

VILLERMAUX (J.D.), SCHWEICX (D.) & HAUTELIN (J.R.), 1986a - Le peigne du diable, un modèle d'interface fractale bidimensionnelle. C. *Rendus Acad. Sci.*, Paris, sér. II, 8 . 307-310.

VILLERMAUX (J.D.), SCHWEICH (D.) & HAUTELIN (J.R.), 1986b - Transfert et réaction a une interface fractale représentée par le peigne du diable *C. Rendus Acad. Sci.*, Paris, sér. II, 9 : 399-404.

WILSON (A.G.), 1981 - *Catastrophe theory and bifurcation.* Univ. Calif. Press, XV + 331 p.

ZADEH (L.A.), 1965 - Fuzzy sets. *Information and Control, 8 :* 338-353.