Un schéma abductif pour la vérification dynamique des bases de connaissances floues.

Using an abductive pattern of inferences for the dynamic verification of fuzzy knowledge bases

Dieudonné Kinkielélé* & Marc Ayel
LIA-ESIGEC/Université de Savoie - Campus de Savoie Technolac
73376 Le Bourget du Lac Cedex, FRANCE

Tél. : +33 79 75 87 88 Fax : +33 79 75 87 85
E-mail : {kinkielele, mayel}@univ-savoie.fr

Résumé :
Nous nous intéressons dans cet article au problème de la vérification des bases de connaissances imprécises et/ou incertaines. Le cadre choisi est le raisonnement approximatif basé sur la théorie des possibilités et celle des sous-ensembles flous. Dans ce cadre, nous définissons un ensemble de propriétés que doivent vérifier les bases de connaissances cohérentes. Nous tirons également parti des travaux menés dans le cadre de la résolution des équations des relations floues et mettons au point un schéma abductif flou, pour vérifier la non violation par la base de connaissances des contraintes d'intégrité définies par l'expert, lors de l'élaboration de cette base.

Mots-clés : validation, vérification, consistance, raisonnement flou, contraintes de cohérence, abduction floue.

Abstract :
The need for tools and methods for knowledge based systems validation no longer needs to be emphasized. Although many tools have been developed for this purpose, most of them are restricted to knowledge bases which are written with formalisms based on classical logic. Nevertheless this logic has shown its limitations; in particular, one cannot correctly represent and handle common sense knowledge.
In this paper, we adapt these existing definitions and methods to uncertain and imprecise knowledge bases. The framework chosen for the management of uncertainty and imprecision is approximate or fuzzy reasoning, which is based on fuzzy sets and possibility theory.
Within this framework, we refine the concept of consistency by introducing the notion of degree of inconsistency. We also show how to use semantic constraints in order to determine inconsistent input sets.

Keywords : validation, vérification, consistency, approximate reasoning, semantic constraints, fuzzy abduction.

---

*Ce travail est partiellement supporté par le gouvernement Congolais, dans le cadre d'une bourse d'études.
This research is partially supported by Congolese government under a doctoral grant

1 - Introduction

Le problème de la cohérence des bases de connaissances a fait l'objet de plusieurs travaux et plusieurs systèmes ont d'ores et déjà été implémentés. Parmi ces travaux, on peut citer [1, 14, 16, 18].
Ces travaux se caractérisent d'une part, par la définition de la cohérence à partir d'un modèle conceptuel de cohérence regroupant l'ensemble des propriétés que doivent vérifier les ensembles de faits ou de règles cohérents, d'autre part, par la prise en compte ou non de la puissance déductive de la base de connaissances. Ainsi, le système CHECK [14] se limite à une comparaison statique des règles pour détecter les redondances et les conflits alors que les systèmes SACCO [1] et COVADIS [16] par exemple utilisent en plus, la puissance déductive de la base de connaissances et tiennent compte des connaissances supplémentaires du domaine d'expertise pour completer le processus de vérification de la cohérence.
Cependant, la plupart des méthodes développées se sont situées dans des formalismes proches de la logique classique car, cela permettait de disposer d'un cadre formel rigoureux et relativement bien défini. Or, si celle-ci se prête bien à la modélisation des connaissances dans des domaines assez bien formalisés, elle ne permet pas de représenter des connaissances de sens commun. Il est ainsi impossible en logique classique de représenter (et de raisonner avec) des informations incomplètes (incertaines, imprécises, vagues). C'est ainsi que de nouveaux formalismes de représentation de connaissances sont apparus permettant ainsi de manipuler de nombreuses informations de sens courant. Cette démarche, au début relativement empirique s'est accompagnée de travaux plus théoriques qui ont permis de définir des cadres formels rigoureux. Pour une analyse plus approfondie des logiques non classiques, on se reportera par exemple, aux travaux du groupe Léa Sombé [13].

Nous nous situons ici dans le cadre du raisonnement approximatif qui est fondé sur la théorie des ensembles flous et sur la théorie des possibilités toutes deux introduites par Zadeh. Il offre un cadre à la fois naturel et souple pour la représentation et le traitement des connaissances imprécises et/ou incertaines. Il permet notamment de :
- manipuler des valeurs de vérité intermédiaires entre 0 (faux absolu) et 1 (vrai absolu);
- utiliser des quantificateurs vagues comme *la plupart* ou *généralement* en plus des quantificateurs existentiel et universel classiques;
- utiliser des variables et des modificateurs linguistiques pour qualifier la probabilité, la possibilité ou la vérité d'une proposition;
- utiliser des règles de déduction en présence des faits qui ne leur conviennent qu'imparfaitement, ce que n'autorisent ni le modus ponens, ni le modus tollens.

Le problème de la validation des bases de connaissances floues a très peu été abordé à ce jour, on peut toutefois citer les travaux de Dubois et Prade[9], Larsen et Nonfjall [15], Yager et Larsen [20] et Kinkielélé [10-12].

Nous proposons dans cet article de définir les propriétés que doivent vérifier les bases de connaissances cohérentes. Nous mettons essentiellement l'accent sur le problème des inconsistances potentielles et sur l'utilisation des contraintes d'intégrité pour l'étude de la cohérence d'une base de connaissances floue.

2 - Le raisonnement approximatif : un bref aperçu

Le raisonnement approximatif est basé d'une part sur le concept de sous-ensemble flou [21] qui est une généralisation de celui d'ensemble ordinaire et permet de représenter des objets aux contours mal définis; d'autre part sur la théorie des possibilités [22] qui permet de représenter l'incertitude et/ou l'imprécision des connaissances en terme de distributions de possibilités.
Ce raisonnement s'articule autour de deux pôles :
- la représentations des connaissances au moyen des distributions de possibilités,
- la manipulation et la combinaison de ces connaissances.

Le lecteur intéressé par la logique floue pourra se reporter aux nombreux travaux détaillés existants, notamment [3, 7, 8, 20-23].
Dans la suite, nous montrons assez brièvement comment représenter les faits et les règles de la base de connaissances et comment déduire d'autres connaissances en utilisant une forme généralisée du modus ponens classique.

2.1 - Représentation des faits

Soit X une variable prenant ses valeurs sur un ensemble U appelé univers du discours, soient A un sous-ensemble flou de U, μ_A sa fonction d'appartenance. La proposition ***X est A*** permet si elle est vraie d'exprimer que les valeurs possibles de la variable X appartiennent à A (c'est le postulat de la théorie des possibilités).
Pour représenter une telle proposition, on associe à X une distribution de possibilités notée π_X définie par $\forall u \in U, \quad \pi_X(u)=\mu_A(u)$ (2.1)
Si une valeur u de U est telle que $\mu_A(u)=0$ alors il est tout à fait **impossible** qu'elle soit la valeur de X conformément à la proposition *X est A*. Si $\mu_A(u)=1$ alors il est tout à fait **possible** qu'elle soit la valeur pour X. Si $0<\mu_A(u)<1$, la possibilité que u soit la valeur de X selon la proposition est d'autant plus grande que $\mu_A(u)$ est proche de 1.
Le degré d'appartenance $\mu_A(u)$ est donc interprété comme le degré de possibilité que u soit la valeur de X conformément à la proposition *X est A*.
Exemple de fait : "Toto est Jeune". On peut représenter graphiquement ce fait. La variable X représente l'âge de Toto

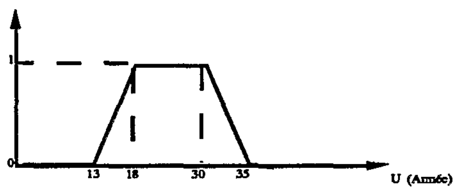

Figure 1 : représentation de la proposition *toto est jeune*

Un ensemble flou A est dit **normalisé** si et seulement s'il existe au moins un u de U tel que $\mu_A(u)=1$.

2.2 - Représentation des règles

Une règle R : "Si X est A alors Y est B" exprime un lien de causalité entre deux variables X et Y prenant leurs valeurs sur les univers U et V respectivement. La

distribution de possibilités simple ne suffit donc pas à représenter une règle puisqu'elle ne décrit que les restrictions des valeurs possibles pour une variable ou un ensemble de variables non forcément liées causalement. L'implication floue est une fonction des fonctions d'appartenance des ensembles flous A et B intervenant dans la règle.
Il existe plusieurs manières de définir cette implication, le lecteur intéressé pourra se reporter à [3, 5] pour plus de détails. Les différentes implications correspondent à différentes catégories de règles.
Ainsi, pour les règles d'inférences graduelles du type "plus X est A, plus Y est B", on utilisera l'implication de Brouwer-Gödel alors qu'on représentera les règles certaines du type "plus X est A, plus Y est B est certain" par l'implication de Kleene-Dienes. Nous donnons dans le tableau suivant, la liste des opérateurs d'implications les plus utilisées.

$\forall (u,v) \in U \times V,\ \mu_A(u) \rightarrow \mu_B(v) =$	$\mu_R(u,v)=1-\mu_A(u)+\mu_A(u)\cdot\mu_B(v)$	Reichenbach
	$\mu_W(u,v)=\max(1-\mu_A(u), \min(\mu_A(u), \mu_B(v)))$	Willmot
	$\mu_{KD}(u,v)=\max(1-\mu_A(u), \mu_B(v))$	Kleene -Dienes
	$\mu_G(u,v)=\begin{cases}\min(\frac{\mu_B(v)}{\mu_A(u)}, 1) & \text{si } \mu_A(u)\neq 0\\ 1 & \text{sinon}\end{cases}$	Goguen
	$\mu_M(u,v)=\min(\mu_A(u), \mu_B(v))$	Mamdami
	$\mu_{RG}(u,v)=\begin{cases}1 & \text{si } \mu_A(u)\leq\mu_B(v)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$	Rescher - Gaines
	$\mu_L(u,v)=\min(1-\mu_A(u)+\mu_B(v), 1)$	Łukasiewicz
	$\mu_{BG}(u,v)=\begin{cases}1 & \text{si } \mu_A(u)\leq\mu_B(v)\\ \mu_B(v) & \text{sinon}\end{cases}$	Brouwer - Gödel
	$\mu_{La}(u,v)=\mu_A(u)\cdot\mu_B(v)$	Larsen

Tableau 1 : Quelques opérateurs d'implication floue[1]

Exemple de règle : [4]
Si le malade maigrit fortement **et si** le malade a moins de 30 ans **alors** le malade est très vraisemblablement insulino-dépendant
Il existe plusieurs catégories de règles selon la nature des prémisses et des conclusions (précises, imprécises, floues et/ou incertaines).

Remarque : Dans la suite, on considérera des règles constituées d'une seule prémisse "X est A". En effet, dans le cas d'une conjonction (resp. disjonction) de plusieurs prémisses, on peut toujours se ramener au cas précédent.
On remplacera "(X_1 est A_1) et (X_2 est A_2)" (resp. "(X_1 est A_1) ou (X_2 est A_2) ") par "(X_1, X_2) est A" où $\forall (u_1,u_2) \in U_1 X U_2,\ \mu_A(u_1,u_2)=T(\mu_{A1}(u_1), \mu_{A2}(u_2))$ (resp. $\mu_A(u_1,u_2)=S(\mu_{A1}(u_1), \mu_{A2}(u_2))$)

[1] Dans ce tableau, les implications de Mamdami et de Larsen sont en fait des conjonction et ne satisfont pas les pré-requis théoriques (elles ne généralisent pas l'implication logique classique). Elles sont néanmoins utilisées comme telles dans le cadre de la commande automatique des processus.

T et S sont respectivement une norme et une conorme triangulaires (voir les définitions des normes et conormes triangulaires en annexe).

2.3 - Le modus ponens généralisé

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Si X est A alors Y est B}\\ \text{X est A'}\end{array}}{\text{Y est B'}}$$

Ce syllogisme exprime une forme généralisée du modus ponens classique appelée *modus ponens généralisé.* Il a été introduit par Zadeh dans le cadre du raisonnement approximatif et autorise la déduction à partir des connaissances imprécises et/ou incertaines.
Soient U et V les domaines des variables X et Y respectivement, la fonction caractéristique de B' est obtenue par : $\forall v \in V$, $\mu_{B'}(v)=\sup_{u\in U}T(\mu_{A'}(u), \mu_A(u)\to\mu_B(v))$ (2.2)
où T est un opérateur du modus ponens généralisé choisi, généralement parmi le normes triangulaires (voir annexe), de façon à rendre le modus ponens généralisé compatible avec le modus ponens classique, $\to$ est une implication floue.
Le modus ponens généralisé (MPG) vérifie les propriétés suivantes :
i) $\forall$A', on a $B'\supseteq B$;
ii) $\forall$A', si $A\supseteq A'$ alors B'=B
iii) $\forall$A', $\forall v\in V$, $\mu_{B'}(v)\geq\sup_{u\in U}\{\mu_{A'}(u) \mid \mu_A(u)=0\}$, si $\{u\in U \mid \mu_A(u)=0\}\supseteq A'$ alors B'=V

L'ensemble B' résultant de l'application du MPG est différent selon qu'on choisit tel ou tel couple (implication, opérateur de modus ponens généralisé).

Pour mesurer la compatibilité entre la prémisse **X est A** et l'observation **X est A'**, on utilise les mesures de possibilité et de nécessité notées respectivement Π et N :

$$\begin{cases}\Pi(A;\ A')=\sup_{u\in U}\min(\pi_A(u),\ \pi_{A'}(u))\\ N(A;\ A')=\inf_{u\in U}\max(\pi_A(u),\ 1-\pi_{A'}(u))\end{cases} \quad (2.3)$$

Π(A; A') estime à quel degré il est possible que la valeur désignée par A' soit compatible avec A, N(A; A') estime à quel degré cela est nécessaire.

3 - La cohérence des bases de connaissances floues

Dans cette section, nous allons définir les notions de consistance et de cohérence sémantique dans le cadre des bases de connaissances floues. Nous verrons dans les sections suivantes comment étudier alors la cohérence statique et la cohérence dynamique[2] de ces bases de connaissances.

3.1 - La notion de consistance en logique floue

Une base de faits dans le cadre de la logique floue, est un ensemble de faits $\{X_1$ est A_1, X_2 est $A_2, \ldots, X_n$ est $A_n\}$. Dans la mesure où chaque variable X_i prend ses valeurs dans

[2] La cohérence dynamiqe à l'inverse de la cohérence statique, tient compte des fonctionnalités sous-jacentes aux mécanismes inférentiels, c'est à dire de la puissance déductive de la base de connaissances.

son univers U_i, **il doit exister au moins un élément u_i de U_i tel que $\mu_A(u_i)=1$** : on dit dans ce cas qu'il est tout à fait possible que u_i soit la valeur de X_i, conformément à la proposition *X_i est A_i*. **La distribution de possibilité π_X est alors dite normalisée.**
Du respect de cette contrainte de normalisation, on définit la notion de consistance dans le cas des bases de connaissances floues.

3.1.1 - Définition d'une base de faits floue consistante

Une base de faits BF est consistante si et seulement si toutes les variables X_i dans la base de faits ont des distributions de possibilité normalisées. Plus formellement,
BF consistante $\Leftrightarrow$

$$\forall\ X_i \text{ est } A_i \in \text{BF},\ \exists u_i \in U_i \,/\, \pi_{X_i}(u_i)=1. \qquad (3.1)$$

Dans le cas contraire (i.e.$\exists X_i$ *est* $A_i \in$ BF / $\forall u_i \in U_i$, $\pi_{X_i}(u_i)<1$) la base de faits est dite inconsistante, car il n'existe aucune interprétation complètement possible pour la base de faits.
Dans ce dernier cas, on définit le **degré d'inconsistance** α_i du singleton $\{X_i$ est $A_i\}$ comme étant le complément à 1 du supremum de la distribution de possibilités (non normalisée) de la variable X_i. $\alpha_i=1-\sup_{u\in U_i}(\pi_{Xi}(u))$.
Le degré d'inconsistance α de la base de faits BF est le maximum des degrés d'inconsistance de ses singletons : $\alpha = \max(\alpha_i) = 1-\min_{\{Xi\in BF\}}(\sup_{u\in Ui}(\pi_{Xi}(u))$. (3.2)
On peut en effet définir la distribution de possibilités π_{BF} d'une base de faits BF comme étant une combinaison conjonctive des différentes distribution de possibilités π_{Xi} des faits "Xi est Ai" de BF.
C'est à dire $\pi_{BF} = \min_{\{Xi\in BF\}}\pi_{Xi}$

Si α=1 alors on a une inconsistance totale (degré d'inconsistance maximal), dans les autres cas ($0<\alpha<1$) il convient de graduer la notion d'inconsistance.

3.2 - Les contraintes de cohérence

Dans une base de connaissances, on peut être amené à exprimer des situations potentielles d'incohérence sous forme de contraintes de cohérence. De telles contraintes permettent d'interdire la présence simultanée de deux ou plusieurs faits dans un ensemble de faits cohérent.

Exemple : dans une même base de faits cohérente, on interdira la présence simultanée des faits "Age(x) $\leq$ 2 ans" et "Poids(x) $\geq$ 20 kg"

Ces contraintes permettent ainsi de déterminer des bases de faits potentiellement incohérentes.

3.2.1 - Définition de la cohérence sémantique

Une base de faits est sémantiquement cohérente si et seulement si elle ne viole pas les contraintes sémantiques définies. Si celles-ci sont exprimées sous forme de règles d'incohérence, une base de faits sémantiquement cohérente ne permettra jamais le déclenchement d'une seule de ces règles; si elles sont représentées sous forme de bases d'incompatibilité, la base de faits cohérente ne devra jamais contenir une seule de ces bases d'incompatibilité.

3.3 - Définition de la cohérence

Nous pouvons à présent définir la notion de cohérence des bases de faits et des bases de règles.

Définition 1 : une base de fait BF est cohérente si et seulement si :

- elle est consistante
- elle est sémantiquement cohérente.

Définition 2 : Une base de règle BR est statiquement cohérente si et seulement si :

- chaque règle est intrinsèquement cohérente ;
- il n'existe pas de conflits entre les règles ;
- il n'existe pas de règles redondantes ;
- il n'existe pas de chaînes contradictoires ;
- il n'y a pas de bouclages dans la base de règles.

Définition 3 : Une base de règle BR est dynamiquement cohérente si et seulement si pour toute base de fait BF cohérente, la base de fait BR.BF[3] est également cohérente.

4 - Etude de la cohérence statique d'une base de connaissances

La cohérence statique s'applique sur les différentes entités structurelles de la base de connaissances sans exploiter les fonctionnalités sous-jacentes aux mécanismes inférentiels. La cohérence statique ne s'attache donc qu'à étudier la cohérence de chaque partie de la base de connaissances. On peut donc parler de la cohérence d'un ensemble quelconque de faits ou de règles.

4.1 - Cohérence interne d'une règle

Si on Considère par exemple la règle : *si Ruminant(x) alors Carnivore(x)*, on s'aperçoit sans chercher à vérifier les autres entités de la base de connaissance qu'elle est incohérente. En effet, on sait que tous les ruminants sont exclusivement herbivores. Sachant par exemple qu'un mouton est un ruminant, on conclura en utilisant cette règle qu'un mouton est carnivore !!

Vérifier la cohérence interne d'une règle consiste à s'assurer que son déclenchement sur une base de faits cohérente ne produit aucune incohérence.

[3] BR.BF est la fermeture déductive de BF par BR, c'est à dire l'ensemble des bases de faits déductibles de BR à partir de BF. Si BR est monotone alors BR.BF a un élément maximal (au sens de l'inclusion), c'est alors cet élément qu'il faut considérer.

Définition :

la règle : R : X_1 est A_1,..., X_n est A_n $\longrightarrow$ Y_1 est B_1,...,Y_m est B_m
est **intrinsèquement cohérente** si et seulement si :

- l'ensemble {X_1 est A_1,..., X_n est A_n} est cohérent;
- $\forall$EF cohérent, R.EF est aussi cohérent

Cette dernière condition impose en particulier que l'ensemble {Y_1 est B_1, Y_2 est B_2,..., Y_m est B_m} soit cohérent.
Pour vérifier la cohérence interne d'une telle règle, il suffira de vérifier que l'ensemble de faits EF={X_1 est A_1,..., X_n est A_n, Y_1 est B_1, ..., Y_m est B_m} est cohérent ; c'est à dire que EF est consistant ($\forall$i,j les ensembles A et B sont normalisés) et ne viole aucune contrainte de cohérence ($\forall K \in BK, K \not\subset EF$).

4.2 - Règles en conflit

Dans les bases de connaissances classiques, deux règles R1 et R2 sont en conflit si et seulement si, après substitution, l'ensemble des prémisses des deux règles constitue une spécification d'ensemble de faits statiquement cohérente alors que l'ensemble de conséquents est une spécification statiquement incohérente. Plus formellement,
R1 et R2 sont en conflit $\Leftrightarrow \exists$ (σ σ') /

$$\sigma(\text{Prem}(R1)) \cup \sigma'(\text{Prem}(R2)) \text{ est cohérent}$$
$$\sigma(\text{Cons}(R1)) \cup \sigma'(\text{Cons}(R2))) \text{ est incohérent}$$

En d'autres termes, R1 et R2 sont en conflit s'il existe une base de faits BF cohérente telle que {R1,R2}.BF soit incohérente.
Exemple : en logique des propositions, les deux règles R1 : $p \rightarrow q$ et R2 : $p, r \rightarrow \neg q$ sont en conflit puisqu'en présence de {p,r}, on déduira successivement q et $\neg$q, c'est à dire qu'on aura l'ensemble de fait {p, r, q, $\neg$q} qui est inconsistant.
On remarquera cependant que le conflit dans les deux règles ne devient effectif qu'en présence de la base de faits {p, r, q, $\neg$q}. On parlera donc de **conflit potentiel** entre les deux règles R1 et R2.

Considérons les deux règles suivantes d'une base de connaissances floue :

R1 : X est A1 --------> Y est B1
R2 : X est A2 --------> Y est B2

A1 et A2 (resp B1 et B2) sont deux sous-ensembles (éventuellement flous) de U (resp. de V), X et Y deux variables de U et V respectivement.

Quand peut on parler de conflit entre ces deux règles ?
En présence du fait *X est A'* (observation), on déduira (en utilisant le modus ponens généralisé) successivement les faits *Y est B1'* et *Y est B2'* avec $\forall v \in V$,

$$\mu_{B1'}(v)=\sup_{u\in U} T(\mu_{A'}(u), \mu_{A1}(u) \rightarrow \mu_{B1}(v)) \qquad (4.1)$$

et $$\mu_{B2'}(v)=\sup_{u\in U} T(\mu_{A'}(u), \mu_{A2}(u) \rightarrow \mu_{B2}(v)) \qquad (4.2)$$

En combinant les deux conclusions partielles, on obtient le fait *Y est B'* avec

$$\forall v \in V, \mu_{B'}(v) = \min(\mu_{B1'}(u), \mu_{B2'}(u))^4 \qquad (4.3)$$

Il y a conflit si l'ensemble B' n'est pas normalisé, i.e. $\forall v \in V, \mu_{B'}(v)<1$. Ce conflit est d'autant plus grand que $\sup_{v \in V}(\mu_{B'}(v)$ est proche de 0.

En fait, en combinant les deux conclusions partielles *Y est B1'* et *Y est B2'*, on a l'une des trois situations illustrées sur la figure 2 suivante. Dans chaque cas, on a représenté les trois ensembles B1', B2' et B' (résultant de la combinaison des deux précédents) :

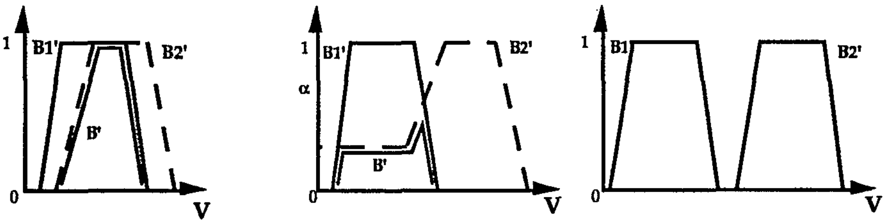

Figure 2 a b c

En figure (a), il n'y a aucun conflit puisqu'il existe des valeurs de V qui sont totalement possibles pour les deux conclusions partielles (et donc pour la conclusion *Y est B'*). En figure (c), aucune valeur n'est un tant soit peu possible selon les deux conclusions partielles : le **conflit est total**. En figure (b), on a une situation intermédiaire, aucune valeur de V n'est totalement possible pour l'attribut Y mais toutes ne sont pas complètement impossibles. Le **conflit est partiel**.

Le conflit entre R1 et R2 dépend de l'opérateur de modus ponens utilisé mais aussi et surtout de l'implication choisie pour modéliser les règles dans la base de connaissances. En général, il n'y a pas de conflit possible si $\Pi(B1; B2)=1$ ou si $A1 \cap A2 = \varnothing$, dans ces deux cas, on a montré [10] en utilisant le min comme opérateur du MPG et l'implication de Brouwer-Gödel qu'il n'y a aucun conflit possible. Dans les autres cas, on a les propositions suivantes (pour les démonstrations de ces propositions, on pourra se référer à [12]).

Proposition 1 : Si on utilise l'une des implications suivantes,

$\forall (a,b) \in [0,1]^2$, $\mu_R(a,b)=1-a+ab$ Reichenbach

$\mu_{KD}(u,v)=\max(1-a, b)$ Kleene -Dienes,

et si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $\Pi(A1; A2)>0$
- $\Pi(B1; B2)<1$

alors quelque soit l'opérateur de modus ponens T choisi, les règles R1 et R2 sont en conflit.

[4] Au lieu du minimum, on peut utiliser tout autre opérateur de conjonction T (une T-norme) le min étant le plus "faible" des opérateurs de conjonction, i.e. $\forall (a,b) \in [0,1]$, $T(a,b) \leq \min(a,b)$.

Proposition 2 : Si on utilise l'une des implications suivantes,

$\forall(a,b)\in[0,1]^2$, $\quad \mu_G(a,b)=\begin{cases}\min(\frac{b}{a}, 1) & \text{si } a\neq 0\\ 1 & \text{sinon}\end{cases}$ Goguen

$\mu_{RG}(a,b)=\begin{cases}1 & \text{si } a\leq b\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ Rescher - Gaines

$\mu_L(a,b)=\min(1-a+b, 1)$ Łukasiewicz

$\mu_{BG}(u,v)=\begin{cases}1 & \text{si } a\leq b\\ b & \text{sinon}\end{cases}$ Brouwer - Gödel

et si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $0<\Pi(A1; A2)\leq 1$
- $\Pi(B1; B2)<\Pi(A1; A2)$

alors quelque soit l'opérateur de modus ponens T choisi, les règles R1 et R2 sont en conflit.

Proposition 3 : Si on utilise l'implication de Willmot, $\forall(a,b)\in[0,1]^2$, $\mu_W(a,b)=\max(1-a, \min(a,b))$ et si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $0<\Pi(A1; A2)<1$
- $\Pi(B1; B2)<1$

alors quelque soit l'opérateur de modus ponens T choisi, les règles R1 et R2 sont en conflit.

Dans les trois propositions précédentes, le degré de conflit est fonction de l'implication choisie.

Proposition 4 : Si on utilise l'une des implications suivantes,

$\forall(a,b)\in[0,1]^2$, $\quad \mu_M(a,b)=\min(a, b)$ Mamdami

$\mu_{La}(u,v)=\max(1-a, b)$ Larsen,

et si l'une seulement des deux conditions suivantes est vérifiée :

- $\Pi(A1; A2)<1$
- $\Pi(B1; B2)<1$

alors quelque soit l'opérateur de modus ponens T choisi, les règles R1 et R2 sont en conflit. Le conflit est total dès que $\Pi(A1; A2)=0$ ou $\Pi(B1; B2)=0$.

Dans toutes les propositions précédentes, le conflit peut être total ou partiel. le degré de conflit dépend de la compatibilité des ensembles A1 et A2 d'une part, B1 et B2 d'autre part.

On trouvera les démonstrations de ces propositions dans [12]. Pour chaque opérateur, *nous mettons en exergue le degré de conflit pour chaque opérateur d'implication floue considérée* (voir [12] pour plus de détails).

4.3 - Le concept de redondance

Soient Prem(R) l'ensemble des prémisses d'une règle R, Cons(R) l'ensemble de ses conséquents.

Une règle R est redondante $\Leftrightarrow \exists$ une règle R1 telle qu'il existe une substitution σ des variables de R1 avec les constantes et variables de R telle que :
$\sigma(\mathrm{Cons}(R1)) \supseteq \mathrm{Cons}(R)$ et $\mathrm{Prem}(R) \supseteq \sigma(\mathrm{Prem}(R1))$.

Une règle redondante R est une règle qui peut être considérée comme inutile car, son déclenchement après R1 n'apporte aucune information complémentaire.

Une règle floue "X est A $\rightarrow$ Y est B" est redondante par rapport à une autre règle floue "X est A1 $\rightarrow$ Y est B1" si et seulement si

$$\forall (u,v) \in U \times V \qquad \mu_{A1}(u) \rightarrow \mu_{B1}(v) \le \mu_A(u) \rightarrow \mu_B(v) \quad (4.4)$$

Dans ce cas, en présence d'une observation *X est A'* quelconque, tout se passe comme si seule la règle R1 avait été déclenchée. Ce qu'on peut encore traduire par : $\forall$ BF, {R1, R}.BF={R1}.BF

Considérons par exemple le cas des règles certaines (représentées par l'implication de Kleene-Dienes), la condition (4.4) devient

$$\forall (u,v) \in U \times V \qquad \max(1-\mu_{A1}(u), \mu_{B1}(v)) \le \max(1-\mu_A(u), \mu_B(v)) \qquad (4.5)$$

C'est à dire

$$\forall (u,v) \in U \times V \qquad 1-\mu_{A1}(u) \le \max(1-\mu_A(u), \mu_B(v)) \qquad (4.6)$$

et

$$\mu_{B1}(v) \le \max(1-\mu_A(u), \mu_B(v)) \qquad (4.7)$$

Sachant que A est normalisé et que $\exists v \in V$, $\mu_B(v)=0$, les conditions précédentes deviennent $\mu_A(u) \le \mu_{A1}(u)$ et $\mu_{B1}(v) \le \mu_B(v)$ ou, ce qui est équivalent, $A1 \supseteq A$ et $B \supseteq B1$.

Proposition 5 : Une règle *R : Si X est A alors Y est B* est redondante s'il existe une règle *R1 : Si X est A1 alors Y est B1* telle que :
- $A1 \supseteq A$ (la règle R est plus contraignante que la règle R1)
- $B \supseteq B1$ (la conclusion *Y est B1* de la règle R1 est plus précise que celle de la règle R)

Cette proposition reste vraie pour toutes les implications floues citées plus haut (sauf celles de Willmot, Larsen et Mamdami) et ce, quelque soit l'opérateur de modus ponens généralisé utilisé. Dans ce cas, en présence d'une observation *X est A* quelconque, tout se passe comme si seule la règle R1 avait été déclenchée. Ce qu'on peut encore traduire par : $\forall$ BF, {R1, R2}.BF={R1}.BF

4.4 - Chaînes contradictoires

On définit généralement une chaîne contradictoire comme étant une suite $R_1, R_2, \ldots, R_n$ de règles telle que les conséquents d'une règle R_i et une partie des prémisses de la règle R_{i+1} suivante soient appariables et telle que les conséquents de la dernière règle et les prémisses de la première règle constituent une spécification statiquement incohérente [2].
Plus formellement, les règles R1,R2,R3,...,Rn forment une chaîne contradictoire $\Leftrightarrow$
$\exists (\sigma, \sigma') / \quad \forall i, (1 \le i \le n-1), (\exists \sigma_i, \sigma_i') / \sigma_i'(\mathrm{Prem}(R_{i+1})) \supseteq \sigma_i(\mathrm{Cons}(R_i))$

et $\sigma(\mathrm{Cons}(R_n) \cup \sigma' \mathrm{Prem}(R_1))$ est un ensemble de faits incohérent

On va définir la notion de chaîne contradictoire en logique floue.
Soient les règles suivantes :

$$R1 : X \text{ est } A' \rightarrow Y \text{ est } B$$
$$R2 : Y \text{ est } B' \rightarrow Z \text{ est } C$$
$$R3 : Z \text{ est } C' \rightarrow X \text{ est } A$$

La suite R1, R2, R3 forment une chaîne contradictoire si :
(i) $B' \supseteq B$, $C' \supseteq C$, (ii) $\Pi(A; A')<1$
Si les conditions précédentes sont vérifiées, alors en présence d'une observation "X est A^*" (où $A' \supseteq A^*$) on inférera successivement les faits *Y est B*, *Z est C* et *X est A* en déclenchant les règles R1, R2 et R3 successivement.
On aura donc le fait "X est A1" où $A1=A^* \cap A$. L'ensemble A1 obtenu n'étant pas normalisé (puisque $\Pi(A; A')<1$), la base de faits résultante est inconsistante.
Si les conditions précédentes sont vérifiées, on peut en effet remplacer cette chaîne de règles par une seule règle *R : X est A' →X est A* qui est incohérente puisque $\Pi(A; A')<1$.

Le cas de chaînes contradictoires ainsi défini est à notre avis le plus simple dans une telle représentation. En fait, si la condition (ii) $\Pi(A; A')<1$ est nécessaire pour que la chaîne R1, R2, R3 soit contradictoire, la contrainte (i) en revanche semble trop forte. Il n' y a aucun risque de conflit si $B' \cap B=\emptyset$ ou $C \cap C'=\emptyset$, par contre le conflit est certain si la condition (i) $B' \supseteq B$, $C' \supseteq C$ est vérifiée. Entre ces deux cas extrêmes, on dira qu'il existe un (ou plusieurs) couple(s) de valeurs $\alpha=\Pi(B; B')$ et $\beta =\Pi(C; C')$ qui en fonction de $\Pi(A;A')$ peuvent conduire à un conflit, partiel ou total selon les valeurs de α et β.

5 - Etude de la cohérence dynamique des bases de connaissances floues

La cohérence dynamique tient compte de la puissance déductive de la base de connaissances et porte sur toutes les bases de faits potentiellement déductibles à l'aide d'un enchaînement de règles et ceci, pour tout enchaînement potentiellement réalisable, c'est à dire, indépendamment de toute stratégie de résolution d'un moteur d'inférences particulier.

On va voir comment à partir des contraintes de cohérence, on pourrait déterminer les ensembles de faits incohérents qu'on peut encore appeler ensembles d'incompatibilité. Auparavant, introduisons d'abord quelques définitions dont nous aurons à nous servir par la suite.

5.1 Définitions

- Attribut initial/déductible : un attribut X prenant ses valeurs sur un univers U est dit initial si et seulement s'il n'existe aucun sous-ensemble A de U tel que "X est A" apparaisse comme conséquent d'une règle. En d'autres termes, la variable X n'apparait que dans les prémisses des règles. Un attribut qui n'est pas initial est dit déductible.
- Fait initial/déductible : un fait "X est A" est initial (resp. déductible) si et seulement si l'attribut X est initial (resp. déductible).

- Ensemble de faits initial : un ensemble de faits est initial si et seulement si il ne contient que des faits initiaux.

5.2 Schéma abductif flou pour la vérification dynamique

On va commencer par partitionner l'ensemble BK des contraintes de cohérence en deux sous-ensembles BK1 et BK2. Le sous-ensemble BK1 ne contiendra que les contraintes de bases, c'est à dire portant exclusivement sur les variables initiales.

Soit K une contrainte de cohérence de BK2 (c'est à dire contenant au moins une variable déductible) exprimant l'incompatibilité de deux faits "X est A" et "Y est B" (dans un même ensemble de faits cohérent), une telle contrainte peut s'écrire sous forme d'une base d'incompatibilités :

$$K=\{X \text{ est } A,\ Y \text{ est } B\}$$

A et B (resp. X et Y) sont deux sous-ensembles éventuellement flous (resp. deux variables), des univers U et V respectivement.

Il s'agit en utilisant la base de règles, de déterminer tous les ensembles de faits initiaux qui permettent de violer cette contrainte. Pour ce faire, on commence par examiner toutes les règles qui permettent de conclure sur un fait *X est A1* et on remplace dans la base d'incompatibiltés le fait *X est A* par *Z est C'* tel que :

$$\frac{\begin{array}{llll}\text{Si} & Z \text{ est } C & \text{alors} & X \text{ est } A1\\ & Z \text{ est } C' & & \end{array}}{\qquad\qquad\qquad X \text{ est } A}$$

Cela revient à faire de l'abduction analogique puisqu'il s'agit en quelque sorte de générer une hypothèse Z est C' justifiant le fait *X est A* observé. Cependant, cette génération doit tenir compte de l'analogie entre les faits *X est A* et *X est A1*. Sous certaines conditions, cette abduction peut s'avérer impossible.
D'après le schéma précédent,

$$\forall u \in U,\ \mu_A(u)=\sup_{w\in W} T(\mu_{C'}(w), \mu_Z(w) \rightarrow \mu_A(u)). \qquad (5.1)$$

On pourrait donc écrire : $\forall\, w \in W,\ \mu_{C'}(w)=F(\mu_A(u), \mu_Z(w) \rightarrow \mu_A(u))$ (5.2)
où F est une fonction à valeur dans [0,1].
Dans ce cas, on aurait le schéma d'inférence suivant.

$$\frac{\begin{array}{llll}\text{Si} & Z \text{ est } C & \text{alors} & X \text{ est } A1\\ & & & X \text{ est } A\end{array}}{Z \text{ est } C' \qquad\qquad\qquad}$$

Mais d'après les propriétés du modus ponens généralisé, on doit avoir $A \supseteq A1$. Une première restriction serait donc de n'examiner que les règles qui vérifient la conditions $A \supseteq A1$.
Il faut ensuite déterminer la fonction F qui permet de calculer l'ensemble flou C'. Une solution serait de prendre C'=C puisque si *X est A* est incompatible avec *Y est B*, le fait *X est A1* l'est davantage, A1 étant un sous-ensemble de A. La solution de l'équation (5.2) est le sous-ensemble flou maximal (au sens de l'inclusion floue) C* qui permet d'inférer *X est A*.

5.2.1 - Résolution d'équations de relations floues

En cherchant la solution maximale C*, telle qu'on ait le schéma abductif suivant :

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Si}\quad Z \text{ est } C \quad \text{alors} \quad X \text{ est } A1\\ \qquad Z \text{ est } C^*\end{array}}{X \text{ est } A}$$

les ensembles C, A et A1 étant connus, on se ramène à un problème de résolution d'équations de relations[5] floues. Ce problème a été étudié dès 1976 [17], dans le cadre d'une composition **sup-min** de relations floues, dont nous donnons la définition.

> Une composition sup-T (où T est une norme triangulaire) de deux relations floues, Q et R des univers UxV et VxW respectivement, est une relation floue M définie sur l'univers UxW par :
> $\forall\ (u,w)\in UxW,\ \mu_M(u,w)=\mu_{Q\circ R}(u,w)=\sup_{v\in V}T(\mu_Q(u,v),\ \mu_R(v,w))$ (5.3)

La composition de relations floues s'est avérée un outil très utile et très puissant dans plusieurs domaines, de la commande de processus au diagnostic médical ou industriel. Dans le cas où soit Q, soit R est inconnue, on se trouve en présence d'une équation de relations floues. Les résultats établis dans [17] ont été généralisés et une étude assez exhaustive de ces équations floues peut être trouvée dans [6].

Nous considérons un cas particulier de cette équation que nous énonçons comme suit :

> *Etant donnés un ensemble flou B de V et une relation floue R de UxV, trouver l'ensemble flou A de U telle que l'ensemble B soit une composition sup-T de R et A.*
> $\forall\ v\in V,\ \mu_B(v)=\mu_{A\circ R}(v)=\sup_{u\in U}T(\mu_A(u),\ \mu_R(u,v))$ (5.4)

Si cette équation a des solutions (A étant l'inconnue), alors la solution maximale A* (au sens de l'inclusion floue) est donnée par [6] :

$$\forall\ u\in U,\ \mu_{A*}(u)=\inf_{v\in V}\psi_T(\mu_R(u,v),\ \mu_B(v)) \qquad (5.5)$$

où est une ψ_T fonction de $[0,1]^2$ dans [0,1] associée à la norme triangulaire T, c'est à dire telle que $\forall(a, b, c)\in [0,1]^3$ on ait :

- $\psi_T(a, \max(b,c)=\max(\psi_T(a, b), \psi_T(a,c))$
- $T(a, \psi_T(a,b))\leq b$
- $\psi_T(a, T(a,c))\geq b$

Cette fonction peut être définie pour toute norme triangulaire T semi-continue à gauche, c'est à dire pour toute norme T telle que, pour toute famille $(b_i)_i$ d'éléments de [0,1], $T(a, \sup_{i\in I}\{b_i\}) = \sup_{i\in I}T(a, b_i)$.

---

[5] Une relation floue R est un sous-ensemble flou d'un univers multidimensionnel. Si U et V sont deux univers, une relation floue R de U vers V, est un sous-ensemble flou du produit cartésien UxV, défini par sa fonction d'appartenance $\mu_R(u,v)$ avec $u\in U$ et $v\in V$. Les propriétés ensemblistes flous élémentaires sont valables pour les relations floues d'un même univers.

Donc, si l'équation (5.2) a des solutions, la solution maximale C* est donnée par :

$$\forall\, w \in W,\ \ \mu_{C*}(w)=\inf_{u\in U}\psi_T(\mu_Z(w)\rightarrow\mu_A(u),\ \mu_A(u)) \qquad (5.6)$$

Nous donnons ci-après, les fonctions associées aux principales normes triangulaires.

Norme triangulaire T	Opérateur associé ψ_T
$T(a,b)=\min(a,b)$	$\psi_T(a,b)=\begin{cases}1 & \text{si } a\le b\\ b & \text{sinon}\end{cases}$
$T(a,b)=a.b$	$\psi_T(a,b)=\begin{cases}1 & \text{si } a\le b\\ \frac{b}{a} & \text{sinon}\end{cases}$
$T(a,b)=\max(0,\ a+b-1)$	$\psi_T(a,b)=\min(1,b-a+1)$

Une fois qu'on a donc choisi l'opérateur T à utiliser pour une implication floue donnée dans modus ponens généralisé, on peut donc calculer la plus grande solution *Y est C** [6] de l'équation (4) dans le schéma abductif défini plus haut.

5.2.2 - Recherche des incohérences dynamiques

Une fois qu'on a déterminé C*, la nouvelle base d'incompatibiltés devient K'={Z est C', Y est B}. On remplace alors K' par K dans l'ensemble BK2.
On peut avoir plusieurs règles concluant sur une observation "X est Ai", les antécédents de ces règles pouvant eux-mêmes apparaître comme conclusions d'autres règles.

L'objectif est de poursuivre ce processus abductif (tant qu'il y a des variables déductibles dans les ensembles d'incompatibilité de BK2) pour avoir une spécification SBF d'ensembles de faits initiaux qui sont autant de bases d'incompatibilités (ne portant alors que sur des variables initiales). SBF contient donc des ensembles de faits initiaux qui, confrontés à la base de règles violent les contraintes d'intégrité.

Soit EF = $\{X_j$ est $A_j,\ldots, X_k$ est $A_k\}$ (avec $j\le k$) un ensemble de SBF, on note X_{EF} l'ensemble $\{X_j,\ldots, X_k\}$ des variables de EF et $\pi_{EF} = \min_{\{Xi/\ \text{"Xi est Ai"}\in EF\}}\pi_{Xi}$, la distribution de possibilités de EF. On a deux situations possibles :

- l'ensemble EF viole une contrainte d'intégrité initiale K_{init} de BK1, c'est à dire :
  $\forall(u_j,\ldots, u_k)\in U_j\times\ldots\times U_k,\ \text{proj}(\pi_{Kinit}, X_{EF})(u_j,\ldots, u_k) \le \pi_{EF}(u_j,\ldots, u_k)$ (5.7) avec
  $\text{proj}(\pi_{Kinit}, X_{EF})(u_j,\ldots, u_k) = \sup_{(u_1,\ldots,u_{j-1},\, u_{k+1},\ldots u_n)} \pi_{Kinit}(u_1,\ldots,u_i,u_j\ldots,u_k,\ldots u_n)$ (5.8)

Dans ce cas, on supprime EF de SBF, puisqu'aucune base de faits initiale cohérente ne

[6] On notera que l'ensemble C* s'il existe, c'est à dire si l'équation (4) a une solution, est forcément normalisé, puisqu'étant la plus grande solution. Pour une justification théorique de ce résultat, on pourra se reporter à [6].

peut contenir EF.
- l'ensemble EF est cohérent dans l'état actuel de la base de connaissances, EF doit être soumis à l'expert. De deux choses l'une :

- L'expert juge que EF est non-réaliste, il faut alors ajouter des contraintes d'intégrité supplémentaires (dans BK1 éventuellement), pour traduire le caractère non réaliste de EF et inhiber la déduction de certaines bases d'incompatibilité.

- L'expert juge que l'ensemble EF est réaliste, c'est à dire que dans la réalité du domaine il peut exister une base de faits initiale contenant EF : la base de connaissances est incohérente.

La base de connaissances est dynamiquement cohérente si à l'issue de ce processus, la spécification SBF des ensembles de faits incohérents est réduit à l'ensemble vide.

6 - Conclusion

Dans cet article, nous avons formellement définie les manifestations anormales qui peuvent se produire dans une base de connaissances floues. Ces définitions et les propositions citées plus haut ont l'avantage de ne dépendre d'aucun opérateur de modus ponens généralisé.
Nous avons aussi tiré parti des travaux qui ont été menés dans le cadre de la résolution d'équations de relations floues pour définir un schéma abductif. Nous utilisons ensuite ce schéma abductif pour vérifier la cohérence sémantique d'une base de connaissances, indépendamment de toute base de faits particulière.
On se rend très facilement compte que la notion de consistance ou de cohérence dans ces systèmes est elle même une notion floue qu'il faut graduer.
Ce travail est le noyau d'un système de vérification de la cohérence des bases de connaissances floues que nous sommes en train de développer. Naturellement, pour l'implémentation d'un tel système, il nous a fallu faire le choix (mais sans perdre de vue la généralité du problème) d'un certain nombre d'opérateurs logiques.

Annexe : normes et conormes triangulaires

Une norme (resp. une conorme) triangulaire ou T-norme (resp. ou T-conorme) est une fonction T (resp. S) de $[0,1]\mathrm{x}[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$ qui vérifient les axiomes suivants : $\forall$ x, y, z, t $\in [0,1]$:

1 - $T(x, y)=T(y, x)$	commutativité	1' - $S(x, y)=S(y, x)$
2 - $T(x, T(y, z))=T(T(x,y), z)$	associativité	2' - $S(x, S(y, z))=S(S(x,y), z)$
3 - $T(x, y)\geq T(z, t)$ si $x\geq z$ et $y\geq t$	monotonie	3' - $S(x, y)\geq S(z, t)$ si $x\geq z$ et $y\geq t$
4 - $T(x, 1)=x$	conditions aux limites	4' - $S(x, 0)=x$

Quelques normes (et leurs conormes duales) les plus utilisées :
$T(x,y)=\min(x,y)$ $S(x,y)=\max(x,y)$
$T(x,y)=\max(x+y-1, 0)$ $S(x,y)=\min(x+y, 1)$
$T(x,y)=x.y$ $S(x,y)=x+y-x.y$
Pour plus de détails concernant les normes et conormes triangulaires, on pourra se

référer à [19].

Remerciements

Nous tenons à remercier les relecteurs anonymes pour leurs remarques et commentaires sur la version préliminaire de cet article.

Références

[1] Ayel M.; Détection d'incohérences dans les bases de connaissances : SACCO; *Thèse d'Etat, Chambéry, septembre 1987, 217 pages.*

[2] Ayel M., Rousset M.C.; La cohérence dans les bases de connaissances; *CEPADUES-Editions, Toulouse, 1990.*

[3] Bouchon-Meunier B.; Inferences with inaccuracy and uncertainty in expert systems; *In Fuzzy expert systems, A. Kandel (ed.), CRC Press, 1991.*

[4] Buisson J.C., Farreny H., Prade H.; Dealing with imprecision and uncertainty in the expert system DIABETO III; *Proc. 2nd Inter. Conf. on Artificial Intelligence, Marseille, Déc.86 (CIIAM-86), Hermès Publ., pp 705-721*

[5] Desprès S.; Un apport à la conception des bases de connaissances : Les opérations de déduction floues; *Thèse d'Université -Université Paris VI, avril 1988*

[6] Di Nola A., Sessa S., Pedrycz W. Sanchez E.; Fuzzy relation equations and their applications to knowledge engineering; *Kluwer academic publishers 1989*

[7] Dubois D., Prade H.; The generalized modus ponens under sup-min composition - A theorical study; *In : M.M. Gupta, A. Kandel, W. Bandler, J.B. Kisza, Eds., Approximate Reasoning in Expert Systems Amsterdam 1985.*

[8] Dubois D., Prade H.; Théorie des possibilités. Application à la représentation des connaissances en informatique; *Masson, Paris, mai 1985.*

[9] Dubois D., Prade H; On the validation of fuzzy knowledge bases *In S. Tzafestas : Fuzzy Reasoning in Information, Decision and Control Systems, Kluwer Academic Publ. 1993.*

[10] Kinkielélé D.; Un modèle conceptuel pour la vérification de la cohérence des bases de connaissances floues; Journées Acquisition - Validation - Apprentissage JAVA' 92, Dourdan avril 1992.

[11] Kinkielélé D.; On the consistency of fuzzy knowledge bases; *European Symposium on the Validation and Verification of Knowledge Based System EUROVAV'93, Palma de Mallorca Mars 93 pp247-261*

[12] Kinkielélé D.; Validation des bases de connaissances floues : détection des inconsistances potentielles; Internal Report LIA/VAL/9-93. Version courte dans 9e RFIA vol.2 pp. 1681-1687 Paris Janv. 94.

[13] Léa Sombé; Raisonnements sur des informations incomplètes en Intelligence Artificielle : comparaison des formalismes à partir d'un exemple; *Revue d'Intelligence Artificielle, vol. 2 - n°3/4, pp. 9-210.*
[14] Nguyien T.A., Perkins W.A., Laffey T.J., Pecora D.; Checking an Expert System Knowledge Base for Consistency and Completeness; *Proc. of IJCAI 1985 pp. 375-378.*
[15] Nonfjall H., Larsen H.L.; Detection of potential inconsistencies in knowledge bases; *Int. J. Intelligent Systems vol. 6 n° 3 1991.*
[16] Rousset M.C.; Sur la cohérence et la validation des bases de connaissances : le système COVADIS; *Thèse d'Etat, Université d'Orsay, septembre 1988.*
[17] Sanchez E.; Resolution of composite fuzzy relation equations; *Information and Control vol.30 pp.38-48, 1976.*
[18] Suwa M., Scott A., Shortliffe E.; An approach to Verifying Completeness and Correctness in a Rule-Based Expert System; *AI Magazine Fall 1982, pp. 16-21.*
[19] Weber S.; Ageneral concept of fuzzy connectives, negations and implications based on t-norms and t-conorms; *Fuzzy Sets and Systems Vol.11, pp. 115-134, 1983.*
[20] Yager R.R., Larsen H.L.; On discovering potential inconsistencies in validating knowledge bases by reflecting to input; *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics 1991*
[21] Zadeh L.A.; Fuzzy sets; *Information and Control, vol. 8, pp. 338-353, 1965*
[22] Zadeh L.A.; Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility; *Fuzzy Sets and Systems Vol.1 n°1, pp. 3-28, 1978.*
[23] Zadeh L.A.; The role of Fuzzy logic in the management of uncertainty in expert systems; *Fuzzy Sets and Systems Vol1 n°11, pp. 199-227, 1983.*