

R

éinterprétation par inversion bayésienne des sondages électriques sur le lac Tritrivakely (Madagascar)

**Heritiana Rakoto¹, Flavien Ranaivo-Nomenjanahary¹, Jean-Bruno Ratsimbazafy¹,
Yves Albouy², Jean-Jacques Schott³, Michel Menvielle⁴**

¹ Institut et Observatoire de Géophysique d'Antananarivo, B.P. 1473, Antananarivo, Madagascar

² ORSTOM, Laboratoire de Géodynamique Interne, 32 avenue Henri Varagnat, 93143 Bondy cedex, France

³ Ecole et Institut de Physique du Globe, 5 rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France

⁴ Université Paris Sud, Laboratoire de Géophysique et Géodynamique Interne, Bât. 504, 91405 Orsay cedex, France

Abstract

The aim of this study is to interpret data from vertical electrical soundings using bayesian approach of the 1D inverse problem. Two orthogonal Schlumberger soundings were carried out on the lake Tritrivakely. By classical interpretation, thickness of first conductive layers is underestimated. Bayesian inversion method is efficient for analysis of equivalence : using two or three layers models, we obtain a well constrained estimation on resistivity of conductive(s) layer(s) but a poorly constrained estimation on thickness. Bayesian inversion may be used also for giving a smooth model resistivity versus depth.

Introduction

En sondage électrique comme dans la plupart des autres techniques de géophysique appliquée, coexistent deux méthodes d'interprétation : la modélisation directe, d'abord réalisée au moyen d'abaques, et l'inversion, qui fait appel nécessairement à des ordinateurs plus ou moins puissants.

La méthode utilisée

❖ Les modèles directs

La modélisation directe consiste à calculer, pour une distribution de résistivités donnée, la résistivité apparente ρ_a en fonction des caractéristiques géométriques de la configuration utilisée. Il faut estimer le potentiel électrique $V(M)$ créé par une source de courant continu $i(P)$ placée en un point P de la surface du sol. Si ρ est la résistivité du milieu, la loi de conservation de courant donne :

$$\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \nabla V + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \nabla V = i(P) \quad (1)$$

Cette équation différentielle a été résolue, depuis les années 50, dans le cas des milieux constitués de couches homogènes et stratifiées. Récemment, associés au développement de la micro-informatique, les traitements 2-D et 3-D ont été également mis au point, soit à partir de la méthode des éléments finis (Dey et Morisson, 1979), soit à partir des équations intégrales (Xu et al, 1988). Autrement dit, le problème direct est pratiquement résolu.

❖ L'inversion bayésienne

L'approche bayésienne consiste à intégrer toutes les informations disponibles en les exprimant sous forme de loi de probabilité. Dans le cas des sondages électriques, les informations nécessaires sont :

- les résistivités apparentes observées $Y = [\rho_a(k), k = 1, m]$ ($Y \in \mathbb{R}^m$), m étant le nombre d'observations,
- le savoir a priori sur le modèle $A = [a^i = (i, d(i), i = 1, n)]$ ($A \in \mathbb{R}^p$), n étant le nombre de couches du modèle stratifié, le nombre de paramètres est $p=2n-1$
- et la loi physique caractérisant le problème direct $Y_m = G(A) = [\rho_a(k), k = 1, m]$.

G est la fonctionnelle permettant de calculer la résistivité apparente Y en fonction des paramètres $X=A$ du modèle.

Nos connaissances sur la structure (résistivités et épaisseurs) sont traduites à l'aide d'une loi uniforme, appelée loi a priori $P(X=A)$. Elles seront actualisées au fur et à mesure qu'on reçoit des informations à partir des résistivités apparentes acquises. Selon Bayes (1763), la probabilité a posteriori

$$P(X = A | Y) = \frac{P(Y | X = A) \cdot P(X = A)}{\int_{A \in \mathbb{R}^p} P(Y | X = A) P(X = A)} \quad (2)$$

représente l'actualisation de nos connaissances a priori sur les paramètres du modèle au vu de l'information contenue dans les observations.

$$P(Y | X = A) = K \exp[-(Y - G(A))^T C_Y^{-1} (Y - G(A))] \quad (3)$$

est la probabilité conditionnelle des données lorsque le vrai modèle est $X=A$. K est la constante de normalisation et C_Y est la matrice de covariance de Y .

La résolution du problème inverse bayésien repose sur le calcul de la probabilité a posteriori. Son estimation fait appel aux principes de méthodes itératives, du type Monte Carlo. Chaque itération est associée à un tirage. L'évolution du système à l'issue de chaque tirage correspond à un processus aléatoire qui s'apparente à celui de la chaîne de Markov.

→ Equivalences

L'influence d'une couche conductrice comprise entre deux couches résistantes est traduite par sa conductance (rapport de sa conductivité à son épaisseur). Plusieurs couples de valeurs possibles des paramètres conduisent à une réponse identique dans la limite des incertitudes des mesures. Les lois marginales y afférentes sont multimodales, c'est à dire présentent plusieurs pics. Dans ce cas, il est impossible à moins de données complémentaires de préciser individuellement la résistivité ou l'épaisseur de la couche intermédiaire.

La méthode bayésienne offre deux possibilités pour estimer les limites d'équivalence :

- l'une analyse la loi jointe des couples résistivité et épaisseur,
- l'autre discrétise l'épaisseur et suppose une variation progressive de la résistivité en fonction de la profondeur. L'interaction des couches contiguës, quantifiée par :

$$I(n) = \exp - \log \frac{(n)}{(n+1)}^2 + \log \frac{(n)}{(n-1)}^2 \quad (4)$$

est utilisée pour pondérer les probabilités a postérieures. Le facteur de lissage assure la convergence de la chaîne de Markov.

||| Le lac Tritrivakely et ses informations a priori

Dans le cadre du programme d'étude des lacs de Madagascar mené par l'ORSTOM, une série de mesures géophysiques a été réalisée en 1992 par l'IOGA sur le lac Tritrivakely. La campagne avait pour objet de cartographier l'épaisseur des sédiments sous ce lac de cratère, avant la réalisation d'un forage de recherches paléoclimatiques.

Situé à 34 km au nord-ouest de la ville d'Antsirabe, sur le plateau d'Ankaratra, Tritrivakely (19°47' S, 46°55' E, 1 778 m) est constitué de coulées volcaniques plioquaternaires recouvrant un socle ancien métamorphisé.

❖ Les données

La cartographie audio-magnétotellurique (f=230 Hz) a permis de situer la région du lac où les sédiments sont les plus épais. C'est dans cette région qu'ont été réalisés les sondages électriques Schlumberger en croix que nous allons étudier. Les deux sondages ont été faits dans le lac lui-même avec des électrodes de longueur supérieure à 1,5 m, plus grande que la profondeur du lac lui-même. Les sondages électriques N-S et E-W sont représentés en **figure 1**. Une interprétation directe nous avait conduit à une modélisation en 2 couches, avec une première couche à 20 Ohm.m de 28 m d'épaisseur alors que le sondage réalisé par les paléoclimatologues (Gasse *et al.*, 1994) est toujours dans les sédiments à 40 m de profondeur.

||| Épaisseur des sédiments du lac Tritrivakely

Nous avons choisi pour l'inversion une loi a priori de nature uniforme peu contraignante par sa forme en prenant un modèle de départ de trois couches. Les résistivité apparentes sont supposées indépendantes les unes des autres et distribuées chacune suivant une loi de probabilité de nature gaussienne.

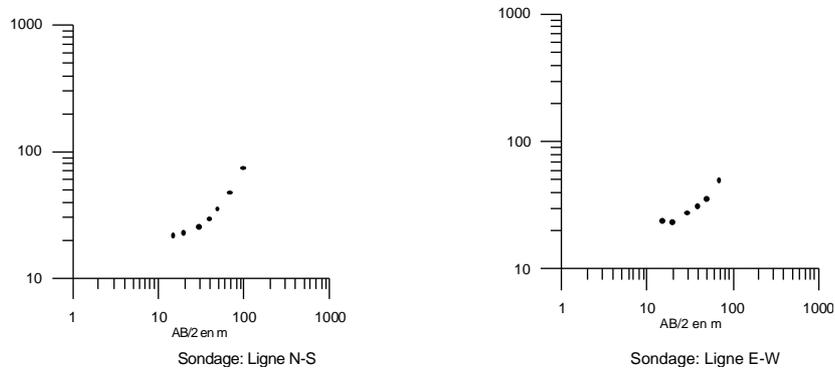


Figure 1 - Les sondages électriques (Dispositif Schlumberger)

Pour 400 tirages au sort réalisés, les lois marginales a posteriori pour cette inversion sont présentées sur la **figure 2**. Pour la première couche, la loi marginale de la résistivité présente un seul pic pour 20 Ohm.m, très net pour le sondage électrique E-W. La résolution de l'épaisseur est moins bonne, la valeur la plus probable est de l'ordre de 18 m. Pour la deuxième couche, la loi marginale de la résistivité présente plusieurs pics pour le sondage N-S. Elle ne peut pas être simulée avec une loi de distribution simple pour le sondage E-W. Le maximum se situe néanmoins autour de 20 Ohm.m. Pour l'épaisseur, la loi marginale est unimodale et ne donne aucune information supplémentaire.

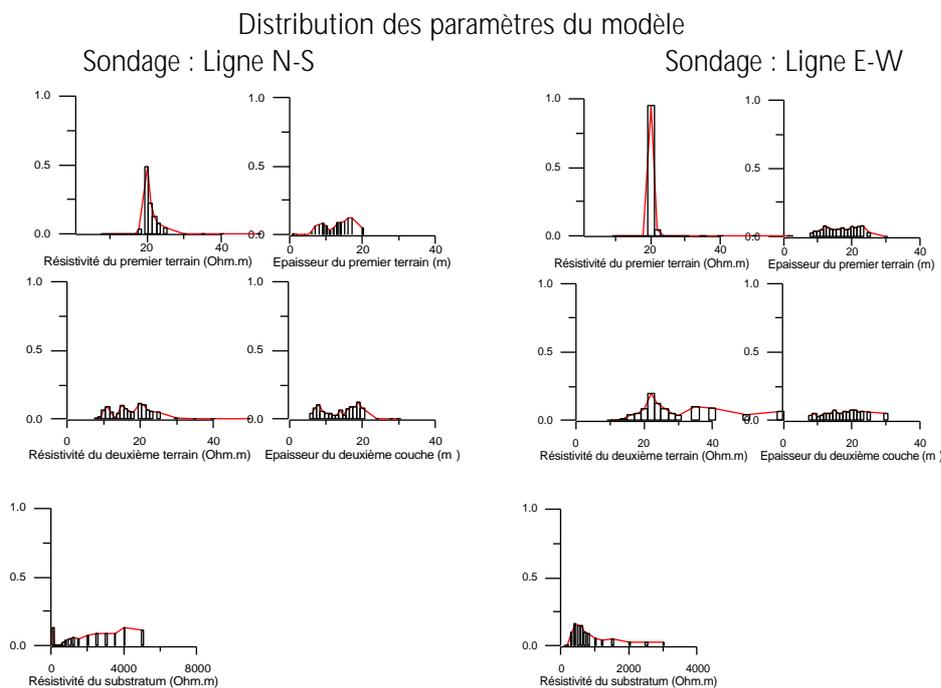


Figure 2 - Distribution a posteriori des paramètres du modèle : modèle à trois couches

Les lois marginales des résistivités de la couche 1 et de la couche 2 présentent un pic important pour des valeurs de résistivité voisines. Ceci montre clairement qu'un modèle à deux couches constitue une meilleure représentation de la distribution de la résistivité avec la profondeur. Cette analyse permet de déterminer si le nombre de couches impliquées dans l'hypothèse a priori est adéquat. Quand ce nombre est élevé, les paramètres en excès sont, soit non résolus, soit décrits par des lois marginales très similaires. Il faut remarquer aussi que la loi marginale de la résistivité du socle présente une allure très étendue, due à l'insuffisance de données pour résoudre ce paramètre.

Nous avons considéré ensuite un modèle a priori à deux couches (**figure 3**). Pour 200 tris aléatoires utilisés, nous observons que pour le sondage N-S, l'interface sédiment-socle est résolu, aussi bien que la résistivité. Les lois marginales a posteriori sont unimodales. Pour le sondage E-W, la loi marginale de

l'épaisseur est bimodale. Elle présente deux maximum équivalents, l'un pour une épaisseur de 25 m, l'autre pour une épaisseur de 35 m. Deux modèles sont donc susceptibles d'expliquer ces données de sondage. Dans ce cas, au lieu de considérer les valeurs les plus probables des paramètres, nous avons calculé leur valeur moyenne pondérée par les probabilités a posteriori. La variance est calculée autour du modèle moyen.

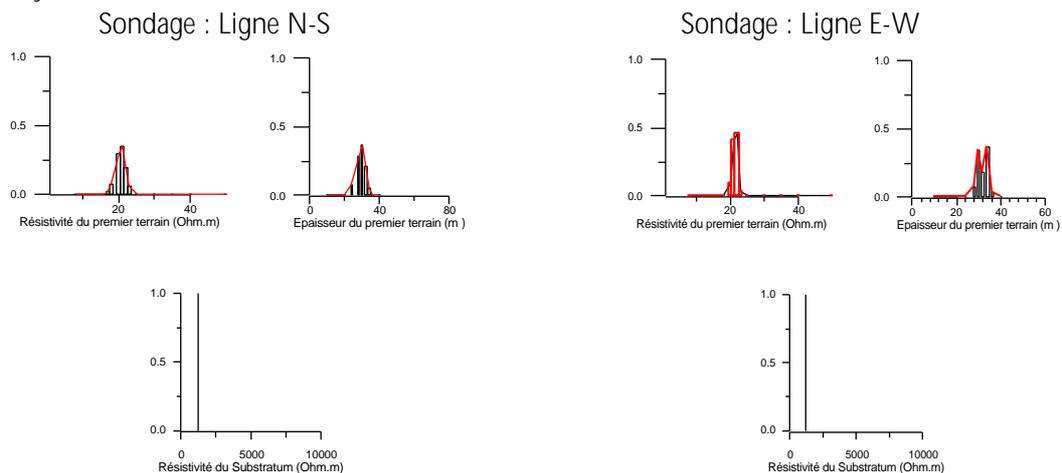


Figure 3 - Distribution a posteriori des paramètres du modèle : modèle à deux couches

Le fait de prendre 3 ou 2 couches nous permet de comprendre l'influence de l'information lorsqu'il y a erreur de spécification. Lorsqu'on introduit une couche supplémentaire dans l'information a priori, le nombre de paramètres augmente. Nous ajoutons une indétermination due aux interactions entre les paramètres, en particulier la corrélation entre épaisseur et résistivité.

Ce problème peut être abordé par les lois jointes. La **figure 4** présente une cartographie des lois jointes des différentes couches. Les régions d'amplitude maximale se situent autour des valeurs les plus probables de la résistivité et de l'épaisseur. La résistivité moyenne du sédiment reste toujours à 20 Ohm.m, par contre l'épaisseur estimée est proche de 39 mètres.

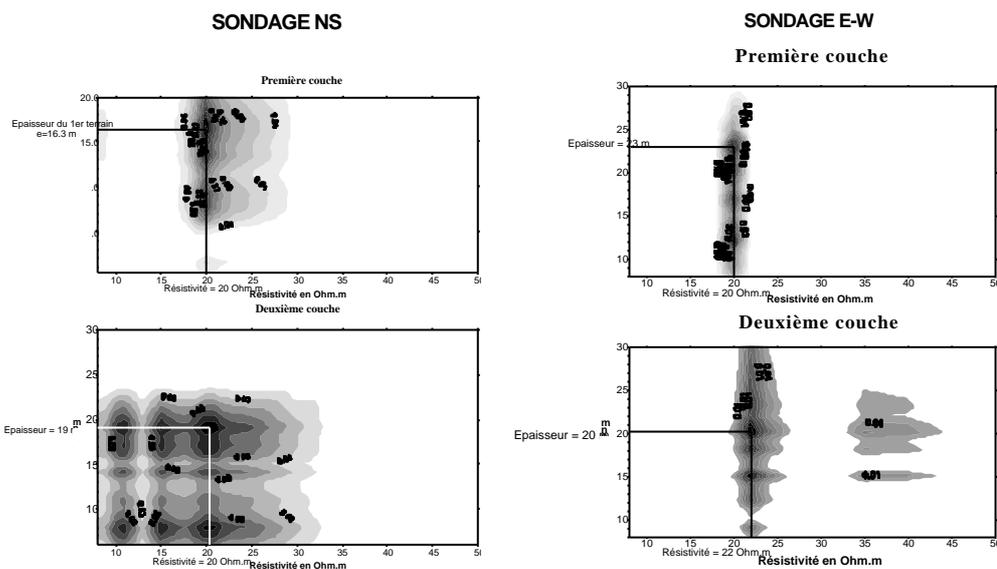


Figure 4 - Loi conjointe résistivité/épaisseur du modèle à trois terrains

L'autre possibilité qui nous est offerte consiste à découper le terrain en plusieurs plaques d'épaisseurs en progression géométrique. L'interaction des couches contiguës se manifeste par un décalage des pics des lois marginales pour l'une et une diminution de l'amplitude pour l'autre. L'effet de ce couplage peut être limité par simple filtrage qui consiste à pondérer les lois de probabilité à l'aide de la relation (4).

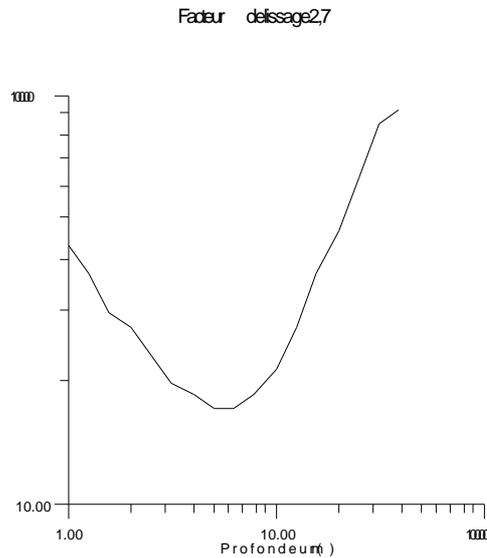


Figure 5 - Courbe de résistivité (Ohm.m) en fonction de la profondeur

La **figure 5** présente la courbe de résistivité en fonction de la profondeur pour un facteur de lissage de l'ordre de $\approx 2,7$. La comparaison entre le faciès lithologique vertical obtenu à partir des carottages et les résultats de l'inversion des données montre que les couches de résistivité différente correspondent à des dépôts sédimentaires bien identifiés. En particulier, d'après le sondage mécanique, la vase argileuse contenant des dépôts de matériaux organiques correspond au minimum de résistivité.

Conclusion

Ce travail montre que la statistique bayésienne permet non seulement de délimiter les solutions équivalentes mais d'obtenir également une distribution continue de la résistivité en fonction de la profondeur. L'échantillonnage de l'épaisseur en progression géométrique peut sembler une méthode lourde, mais elle peut être très utile pour des différenciations fines.

Bibliographie

- Bayes Th. (1702-1761), 1958. Essay towards solving a problem in the doctrine of chances, 1763, republished in *Biometrika*, 45, p. 298-315.
- Dey A., Morrison H.F., 1979. Resistivity modelling for arbitrary shaped three dimensional structures. *Geophysics*, 44 : 753-780.
- Gasse F., G.D.R. 970, 1994. A 36 ka environmental record in the southern tropics : Lake Tritrivakely (Madagascar). *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 318, série II : 1513-1519.
- Xu Shi-zhe, Zucheng Gao, Sheng-kai Zhao, 1988. An integral formulation for three-dimensional terrain modeling. *Geophysics*, 53 : 546-552.